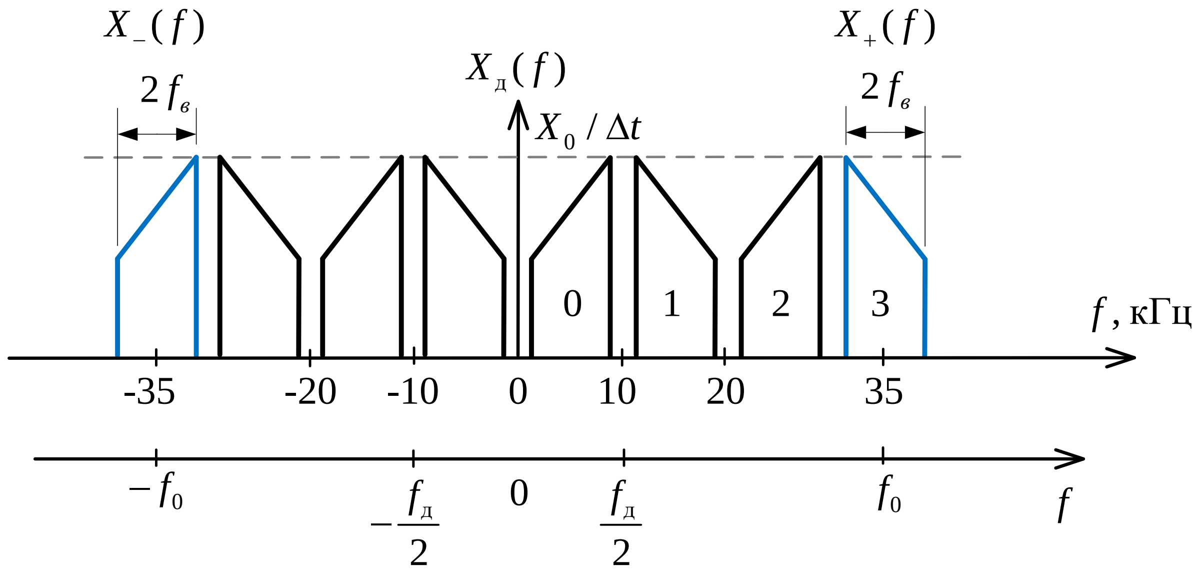
Лекция 12 по курсу «Цифровая обработка сигналов»

21 апреля 2025 г.

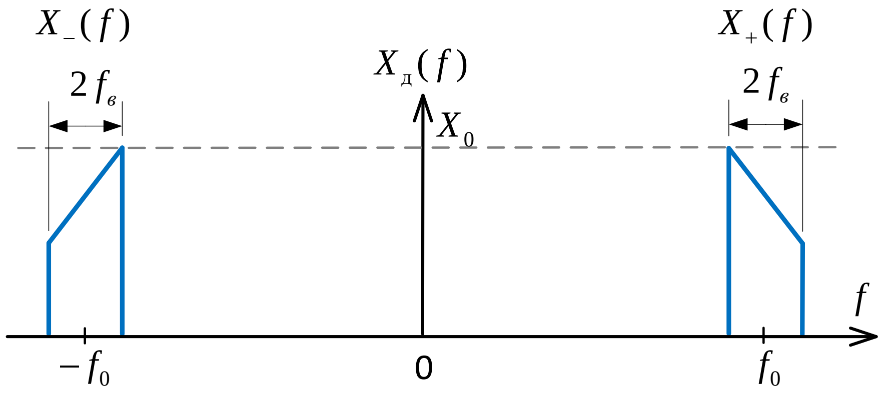
7.3. Субдискретизация полосовых радиосигналов.

- *Перенос спектра между зонами Найквиста при субдискретизации.*
- *Случай целочисленных полос.*
- *Случай нецелочисленных полос.*



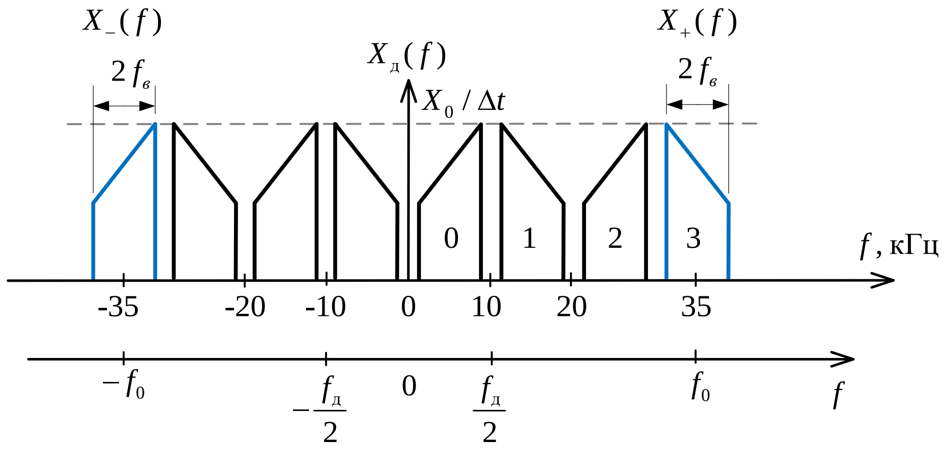
7.3. Субдискретизация полосовых радиосигналов.

Рассмотрим *действительный* полосовой сигнал со спектром, изображенным на рисунке.



- Компонента $X_+(f)$ носит название прямого спектра, а компонента $X_-(f)$ – инверсного.
- Для такого сигнала необходимая в соответствии с теоремой отсчетов частота дискретизации $f_д = 2(f_0 + f_в)$ может оказаться очень высокой, находящейся за пределами быстродействия АЦП.
- Для узкополосных радиосигналов ($f_0 \gg f_в$) существуют методы дискретизации с частотой $f_д < 2(f_0 + f_в)$, позволяющие сохранить информацию, необходимую для восстановления исходного сигнала.
- Одним из таких методов является субдискретизация (англ. *undersampling*). Субдискретизация заключается в том, что частота дискретизации $f_д$ выбирается такой, периодическое повторение копий прямого и инверсного спектра исходного сигнала происходит без их перекрытия. При этом эффект наложения не приводит к искажению информации о спектре исходного сигнала.

Пример. Полосовой радиосигнал $f_0 = 35\,\text{кГц}$, $f_0 \gg 2f_в$, $2f_в = 9{,}5\ \text{кГц}$. может быть дискретизован с частотой дискретизации $f_д = 20\ \text{кГц}$ без перекрытия отдельных копий спектра.

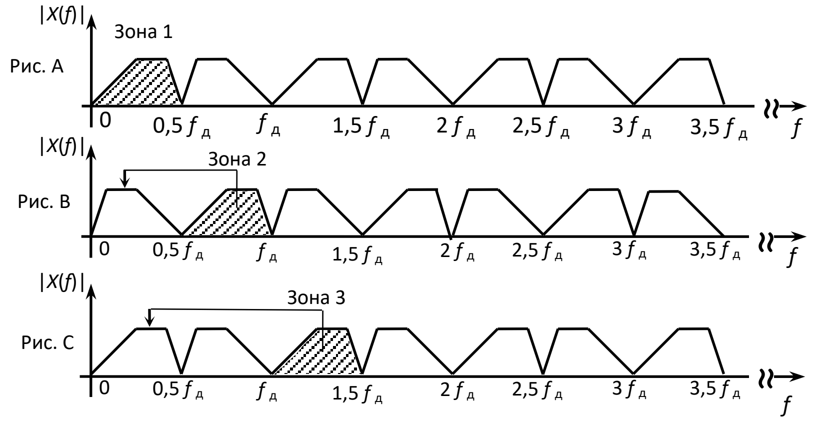


По теореме отсчетов требуется $f_д \geq 2(f_0 + f_в) = 79{,}5\,\text{кГц}$.

Субдискретизация полосовых радиосигналов

Перенос спектра между зонами Найквиста при субдискретизации

При правильной субдискретизации на частотных диапазонах от $-f_{\text{д}}/2$ до 0 и от $f_{\text{д}}/2$ до 0 будут находится копии прямого и инверсного спектра в порядке, зависящем от зоны Найквиста.



Перенос спектра между зонами Найквиста

На рис. А представлен случай, когда полоса подлежащего дискретизации сигнала ограничена первой зоной Найквиста, а в остальных зонах имеются боковые (отражённые) частотные компоненты (периодическое повторение спектра, вызванное дискретизацией). Это соответствует дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов.

На рис. Б представлен случай, когда полоса подлежащего дискретизации сигнала полностью находится во второй зоне Найквиста. Его изображение будет появляться в первой зоне Найквиста, потому что перенос спектра всегда сопутствует процессу дискретизации. Следует отметить, что смещенная полоса в первую зону Найквиста содержит всю информацию о спектре исходного сигнала, только порядок частотных компонентов в спектре обратный.

На рис. В показан вариант подлежащего дискретизации сигнала, ограниченного третьей зоной Найквиста. Здесь отражение в первую зону происходит без обращения частот. Фактически полосы подлежащих дискретизации сигналов могут лежать в любой зоне Найквиста, а отражения в первую зону является точным представлением спектра сигнала (за исключением обращения частот, которое происходит, когда спектры сигналов расположены в четных зонах).

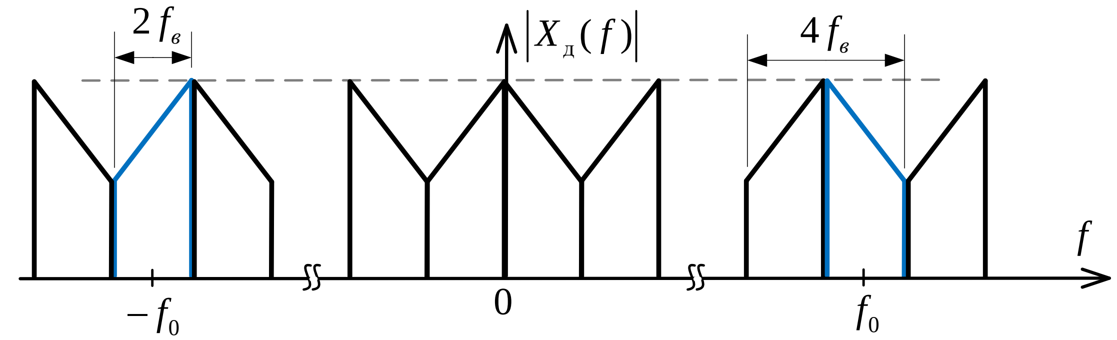
Субдискретизация полосовых радиосигналов

Случай целочисленных полос

Рассмотрим для субдискретизации ограничения на выбор частоты $f_{\text{д}}$. Если граничные частоты спектра $f_0 - f_в$ и $f_0 + f_в$ кратны его ширине $2 f_в$, т. е. если

$$f_0 - f_в = m(2 f_в), \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (1)$$

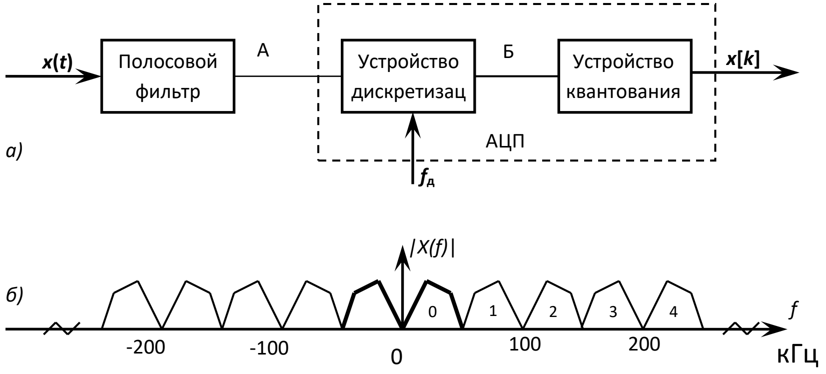
то минимальную частоту дискретизации можно взять равной $f_{\text{д min}} = 4 f_в$.



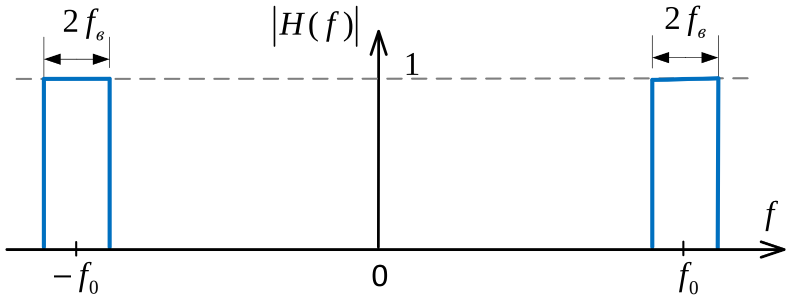
Число m показывает, сколько переносов прямого спектра нужно совершить, чтобы точка $f_0 - f_в$ попала в начало координат.

Такая плотная упаковка отображений спектров $X_+(f)$ и $X_-(f)$ практически может быть использована при условии, что компоненты $X_+(f)$ и $X_-(f)$ строго финитные функции. В этом случае эффект наложения частичных спектров друг на друга будет отсутствовать. Этот метод дискретизации называется ещё *полосовой дискретизацией с недостаточной выборкой для целочисленных полос*.

Пример. На рисунке *а)* показано устройство предварительной обработки данных приёмника многоканальной системы связи. $2 f_в = f_{\text{д}}/2 = 50$ кГц.



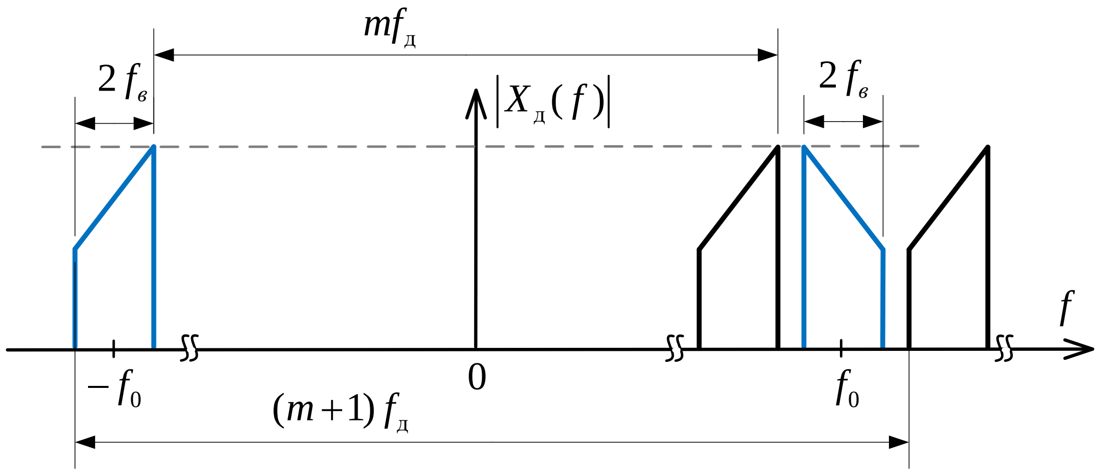
Спектр принимаемого сигнала показан на рисунке *б)* с указанием номеров каналов. Для выделения сигнала в нужном канале перед дискретизацией с наименьшей возможной частотой служит полосовой фильтр. АЧХ идеального фильтра представлена на рисунке ниже.



Субдискретизация полосовых радиосигналов

Случай нецелочисленных полос

- Плотная упаковка отображений спектров $X_+(f)$ и $X_-(f)$ возможна, если компоненты $X_+(f)$ и $X_-(f)$ строго финитные функции и выполняется условие (1) для целочисленных полос.
- В общем случае компоненты $X_+(f)$ и $X_-(f)$ имеют «хвосты» и нецелочисленные полосы.



Для нахождения частоты дискретизации $f_д$ необходимо использовать условие, что m и $m+1$ переносов $X_-(f)$ не дают пересечений с $X_+(f)$:

$$\begin{aligned}-f_0+f_в+mf_д &\le f_0-f_в,\\ -f_0-f_в+(m+1)f_д &\ge f_0+f_в.\end{aligned} \qquad (2)$$

Из (2) получаем

$$mf_д \le 2(f_0-f_в), \qquad (m+1)f_д \ge 2(f_0+f_в) \qquad (3)$$

или

$$\frac{2(f_0+f_в)}{m+1} \le f_д \le \frac{2(f_0-f_в)}{m}. \qquad (4)$$

Из (4) субдискретизация возможна, если

$$\frac{(f_0+f_в)}{m+1} \le \frac{f_0-f_в}{m},$$

т. е.

$$m \le \frac{f_0-f_в}{2f_в}. \qquad (5)$$

Число m называется *порядком субдискретизации*.

Поскольку общая протяженность спектра $X_-(f)$ и $X_+(f)$ равна $4f_в$, то при отсутствии перекрытий должно быть выполнено неравенство

$$f_д \ge 4f_в. \qquad (6)$$

Запишем формулу (4) в виде

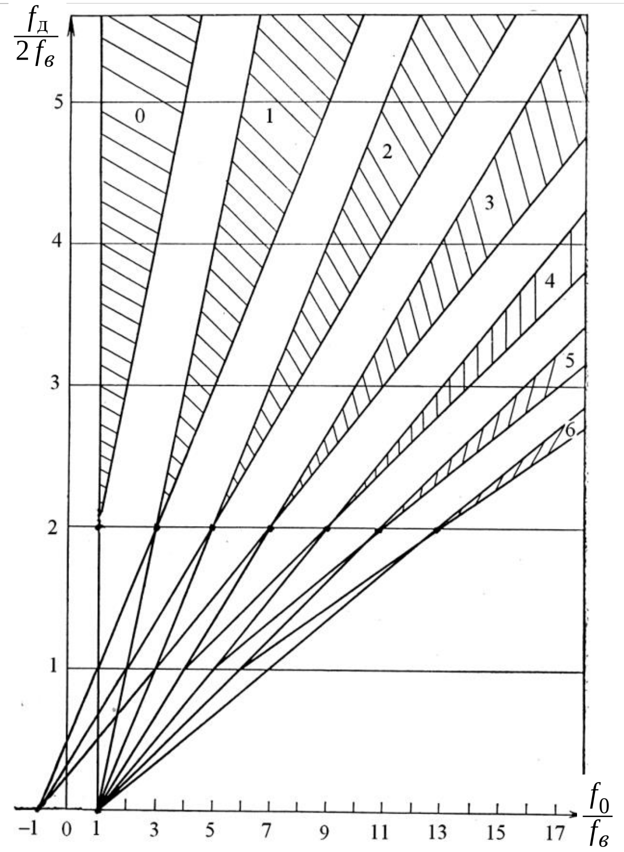
$$\frac{\frac{f_0}{f_в}+1}{m+1}<\frac{f_д}{2f_в}<\frac{\frac{f_0}{f_в}-1}{m}. \qquad (7)$$

В соответствии с (7) допустимый диапазон выбора $f_д$ на графике с осями $\frac{f_0}{f_в}$ и $\frac{f_д}{2f_в}$ будет находиться справа от прямой $\frac{f_д}{2f_в}=\frac{1}{m+1}\left(\frac{f_0}{f_в}+1\right)$ и слева от $\frac{f_д}{2f_в}=\frac{1}{m}\left(\frac{f_0}{f_в}-1\right)$.

Примечание. Если выбрать частоту дискретизации равной $f_д=\frac{4f_0}{2m+1}$, то эти значения отвечают биссектрисам зон

$$\frac{f_д}{2f_в}=\frac{f_0}{f_в}\cdot\frac{2}{2m+1}\quad .$$

Если $X_+(f)$ и $X_-(f)$ имеют симметричную форму, то при этих частотах дискретизации эффект наложения частичных спектров будет минимальным, т.е. обеспечивается центрирование спектра сигнала в полосе Найквиста.



Диапазоны выбора частоты дискретизации.

Простой способ построения данной диаграммы заключается в следующем. Отмечаются точки с координатами (1; 2), (3; 2), (5; 2), (7; 2) и т.д. Эти точки соединяются прямыми с точками (0; –1) и (0; 1). Между этими прямыми и будут находиться зоны для выбора частоты дискретизации при различных f_0 и m.

Субдискретизация полосовых радиосигналов

Пример. Рассмотрим полосовой радиосигнал с прямоугольным спектром, у которого $2f_в = 4{,}8$ кГц и $f_0 = 102{,}44$ кГц. Минимальная частота дискретизации, выбираемая по теореме отсчетов, должна быть

$$f_д = 2(f_0 + f_в) = 209{,}680 \text{ кГц}$$

Из условия

$$m \le \frac{f_0 - f_в}{2f_в}.$$

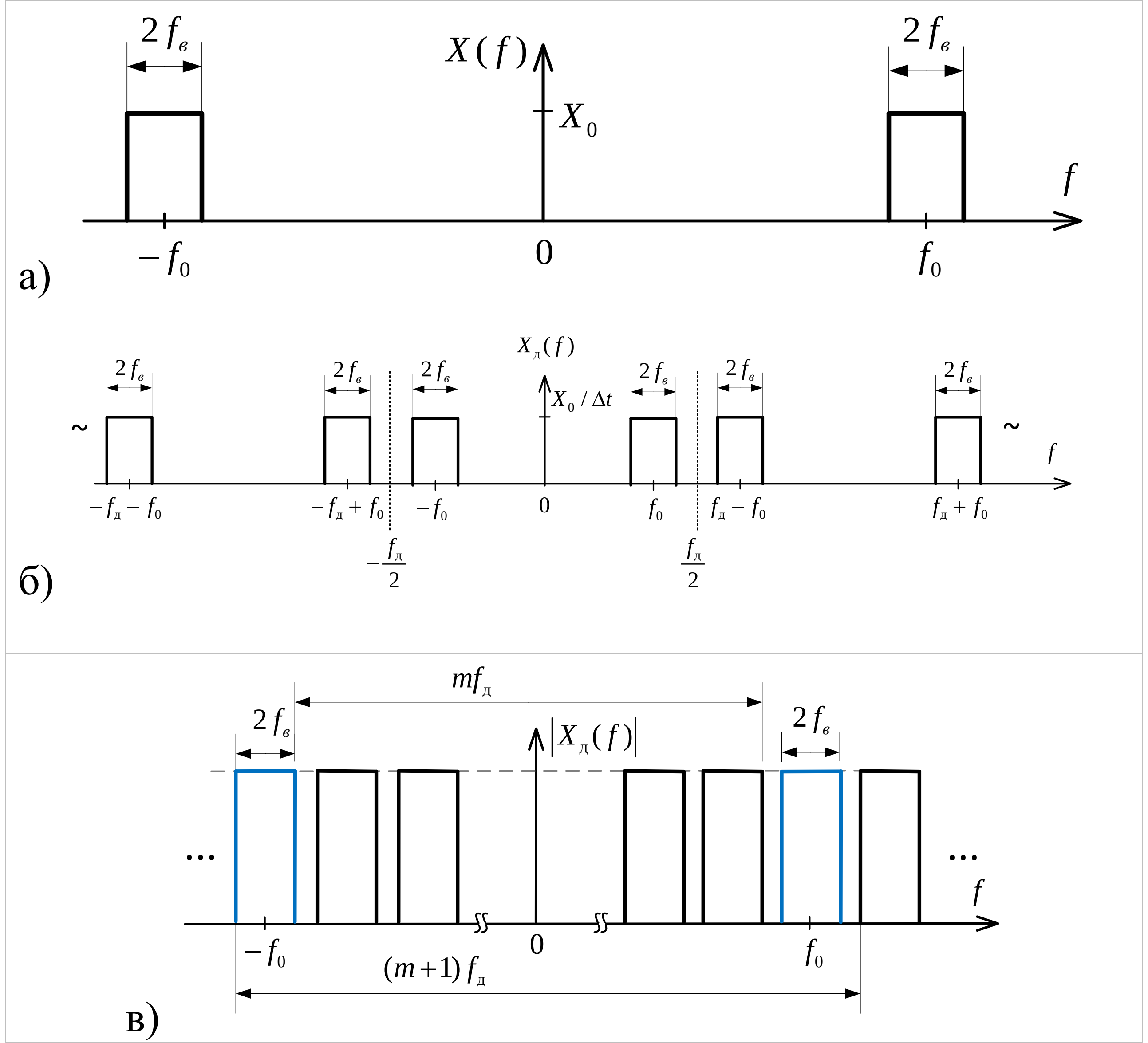
находим для порядка субдискретизации: $m < 20{,}84$. Выберем $m = 20$, тогда

$$\frac{2(f_0 + f_в)}{m+1} \le f_д \le \frac{2(f_0 - f_в)}{m},$$

$$9984{,}76 \text{ Гц} < f_д < 10004 \text{ кГц}.$$

Частота дискретизации может быть взята равной, например, $f_д = 10$ кГц, что на порядок меньше требуемой по теореме отсчетов. Одинаковые зазоры между копиями спектра (центрирование в зоне Найквиста) будут при выборе

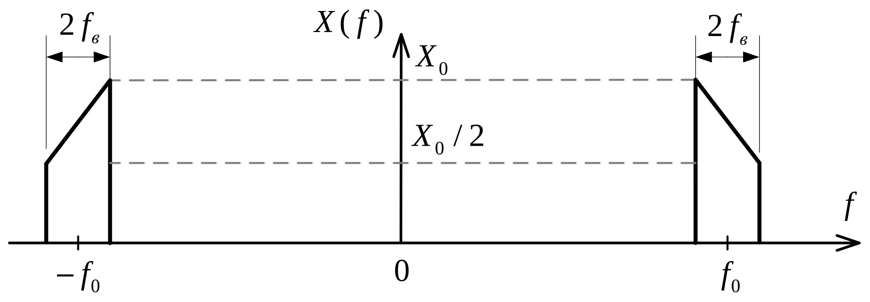
$$f_д = \frac{4f_0}{2m+1} = 9994{,}14 \text{ Гц}.$$



а) Спектр полосового сигнала, б) спектр после дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов, в) спектр после субдискретизации.

Субдискретизация полосовых радиосигналов

Пример. Спектр $X(f)$ некоторого полосового сигнала $x(t)$ изображен на рисунке ниже, f_0 — несущая частота, $f_0 \gg 2f_в$, $2f_в = 9{,}5$ кГц.



Изобразить спектр сигнала после субдискретизации с наименьшей возможной частотой $f_д$, обеспечивающей центрирование субдискретизуемого сигнала в полосе Найквиста для случаев: а) $f_0 = 45$ кГц, б) $f_0 = 35$ кГц.

Решение для случая а) $f_0 = 45$ кГц**.**

Границы выбора частоты дискретизации определяются неравенством

$$\frac{2(f_0 + f_в)}{m+1} < f_д < \frac{2(f_0 - f_в)}{m}.$$

где m – порядок субдискретизации.

$f_д$ может быть выбрана в соответствии с этим неравенством при условии

$$m < \frac{f_0 - f_в}{2f_в},$$

откуда $m < 4{,}24$.

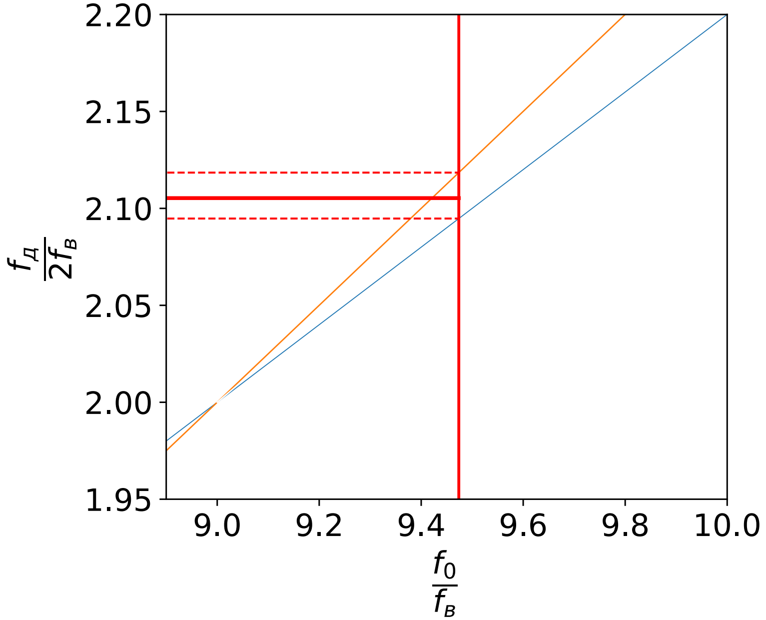
Порядок субдискретизации является натуральным числом, а значит максимально возможный порядок субдискретизации равен $m = 4$.

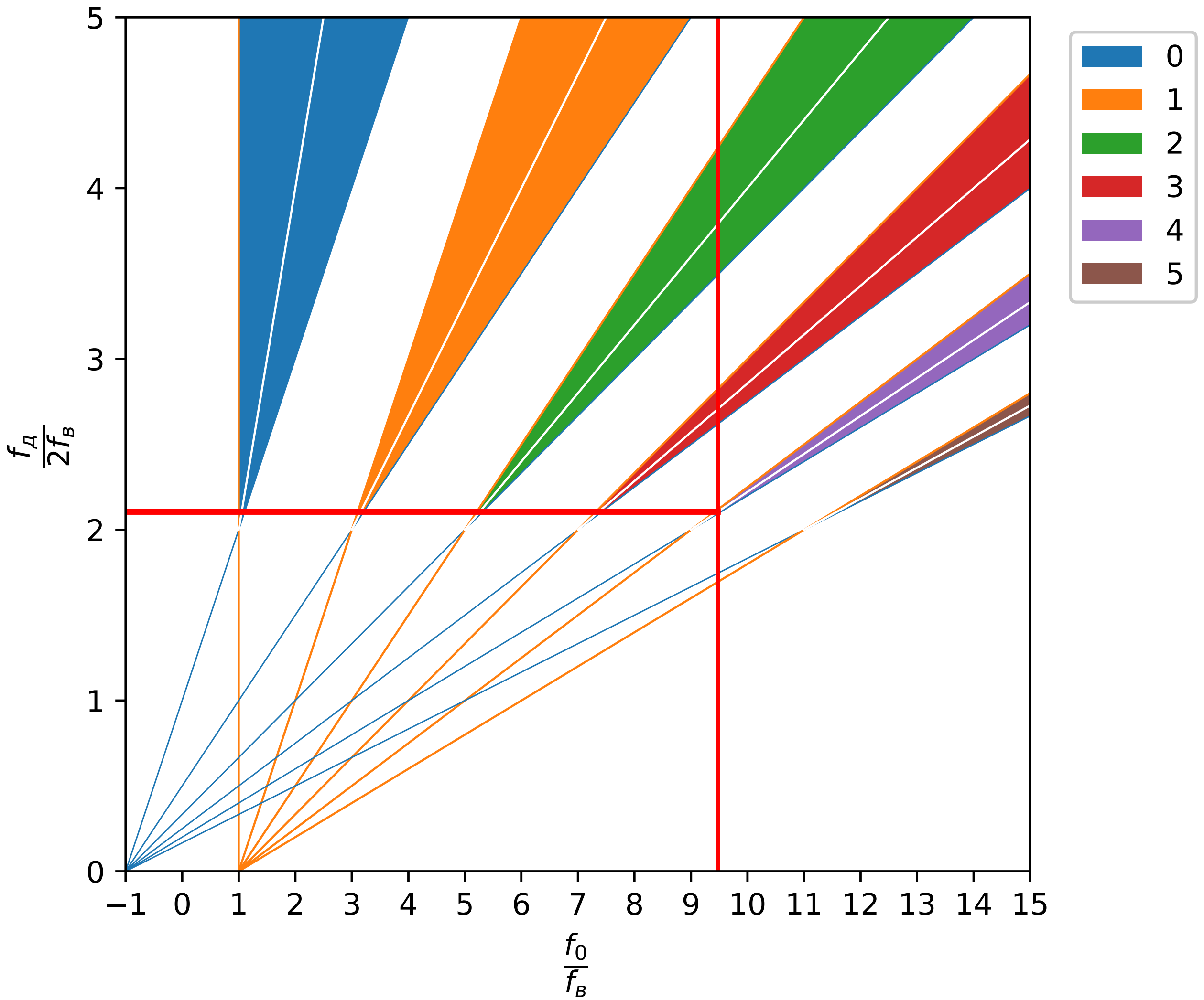
Для этого порядка субдискретизации условия выбора $f_д$ $19{,}9$ кГц $< f_д < 20{,}125$ кГц.

Отметим, что при дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов потребовалось бы выбрать

$$f_д \geq 2(f_0 + f_в) = 99{,}5 \text{ кГц}$$

Субдискретизация полосовых радиосигналов





Область допустимых значений $f_д$

$$\frac{2(f_0+f_в)}{m+1} < f_д < \frac{2(f_0-f_в)}{m}.$$

для каждого порядка m может быть описана диаграммой, где случай центрирования субдискретизуемого сигнала в полосе Найквиста отвечает попаданием на биссектрису зоны выбора $f_д$:

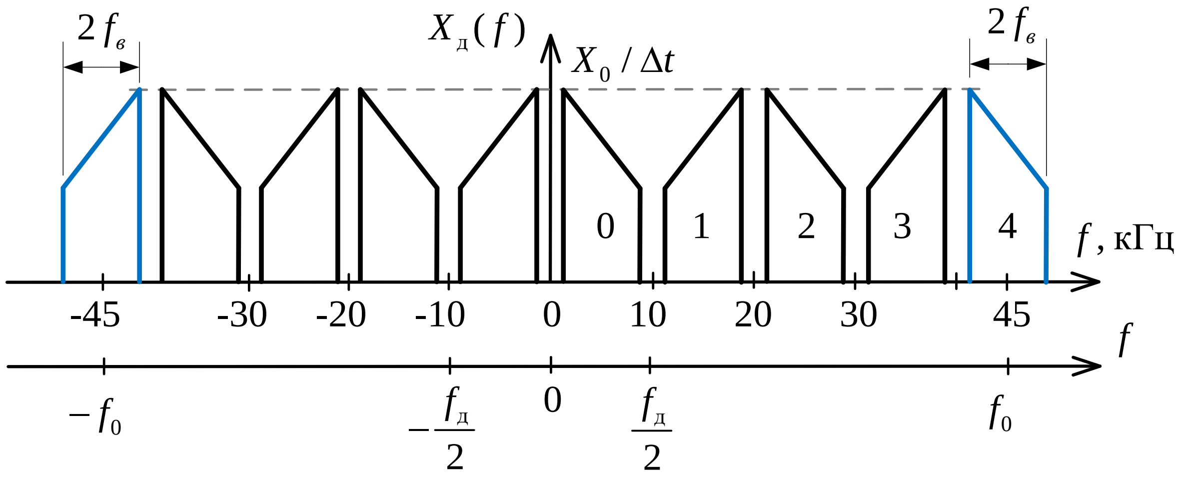
$$f_д = \frac{4f_0}{2m+1} = 20 \text{ кГц}.$$

Цвета на диаграмме соответствуют разным значениям m.

Субдискретизация полосовых радиосигналов

Построим график спектра сигнала после его дискретизации с частотой $f_д = 20$ кГц.

Правильный выбор частоты субдискретизации позволяет избежать (для реального сигнала – минимизировать) перекрытия отдельных копий спектра.



Порядок субдискретизации $m = 4$ означает, что прямой спектр сигнала и его несущая частота находятся в пятой зоне Найквиста (на рисунке обозначен как канал 4).

На частотах от 0 до $f_д/2$ находится копия прямого спектра $X_+(f)$.

При $f_Д = 20$ кГц копии прямого и инверсного спектра оказываются центрованным в полосе Найквиста (между копиями одинаковые зазоры), что позволяет для реального сигнала минимизировать перекрытие неизбежно возникающих хвостов спектра вблизи границы полосы.

Субдискретизация полосовых радиосигналов

Решение для случая б) $f_0 = 35$ кГц.

В соответствии с условием

$$m < \frac{f_0 - f_в}{2 f_в},$$

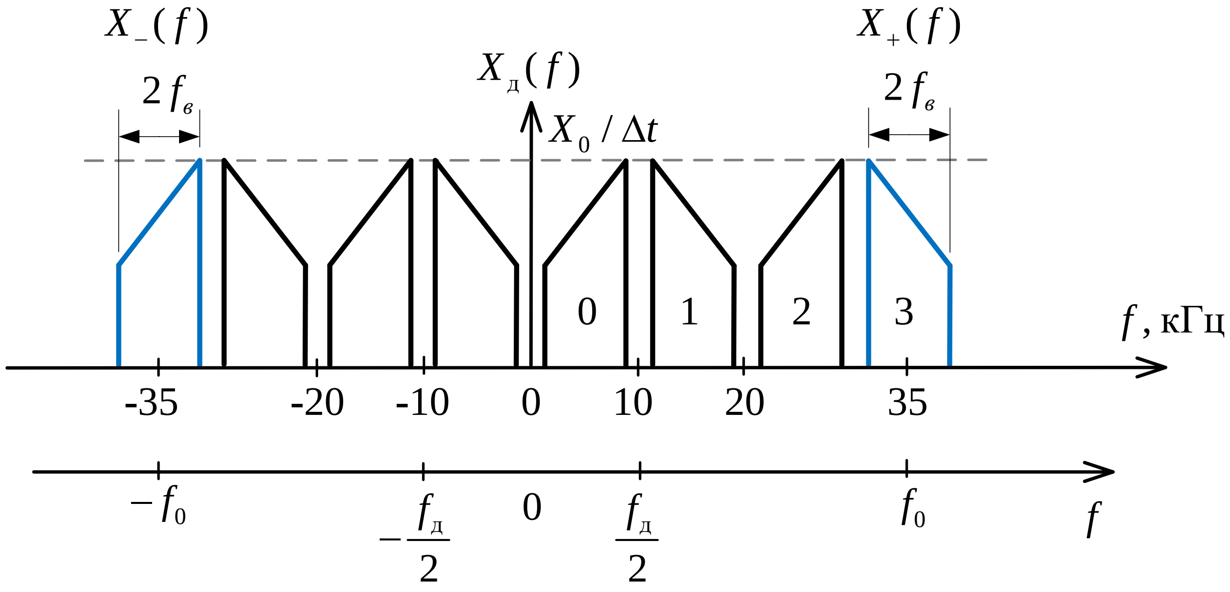
находим, что $m < 3{,}19$.

Наибольший возможный порядок субдискретизации $m = 3$.

Наименьшая частота дискретизации, обеспечивающая центрирование субдискретизуемого сигнала в полосе Найквиста, равна

$$f_д = \frac{4 f_0}{2m+1} = 20 \text{ кГц}.$$

То, что порядок субдискретизации $m = 3$ является нечетным, означает, что частотах от 0 до $f_д / 2$ находится копия инверсного спектра $X_-(f)$, а на частотах от $-f_д / 2$ до 0 — копия прямого спектра $X_+(f)$.



Отметим, что при дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов потребовалось бы выбрать

$$f_д \geq 2(f_0 + f_в) = 79{,}5 \text{ кГц}.$$

Задачи с лекции

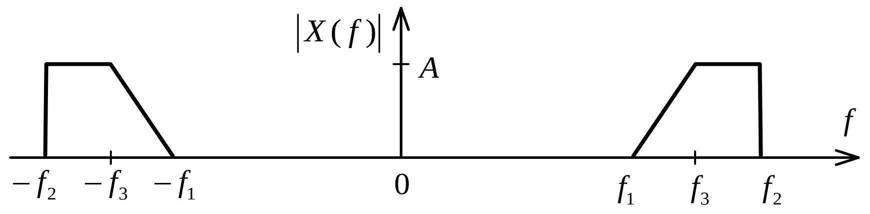
Задачи для самостоятельного решения

№1. Для полосового сигнала FM-радио с шириной полосы $2f_в = 20$ МГц и несущей частотой $f_0 = 98$ МГц, определить:

а) минимальную частоту дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов,

б) максимально возможный порядок субдискретизации m и границы для выбора частоты дискретизации для него.

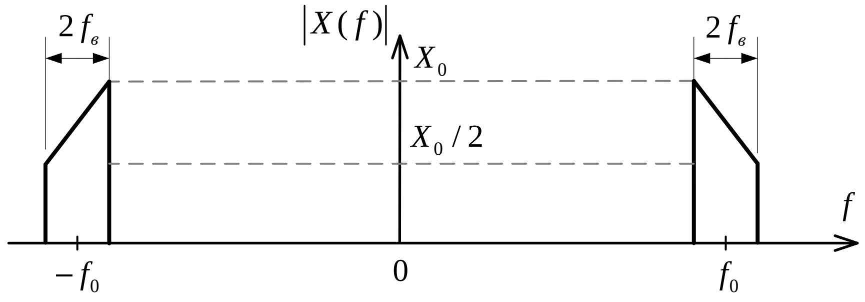
№2. На рисунке изображён модуль спектральной плотности узкополосного сигнала. Пусть полоса $B = f_2 - f_1 = 10$ кГц и сигнал дискретизуется с частотой $f_д = 2B$. $f_3 = (f_1 + f_2)/2$.



Изобразить, когда это возможно, модуль спектральной плотности дискретизованного сигнала в диапазоне $[-f_2;\ f_2]$ для случая: а) $f_2 / B = 3$, б) $f_2 / B = 4$, в) $f_2 / B = 4{,}5$.

Обосновать результаты.

№3. На рисунке изображен модуль спектральной плотности непрерывного полосового сигнала, $2f_в = 5$ МГц, $f_0 = 20$ МГц.

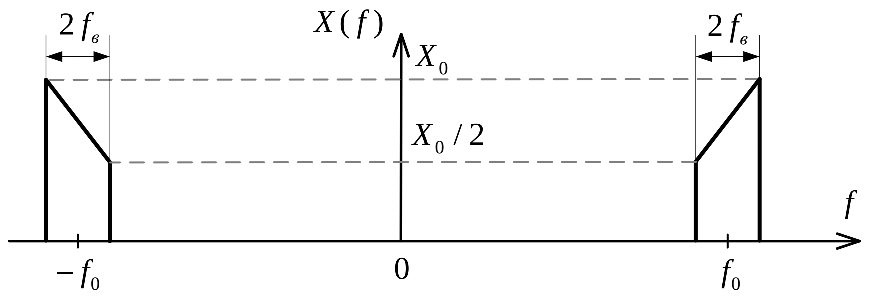


Изобразить, когда это возможно, модуль спектральной плотности дискретизованного сигнала для значений частоты дискретизации $f_д$:

$f_{д1}$=22,5 МГц; $f_{д2}$=17,5 МГц; $f_{д3}$=15 МГц; $f_{д4}$=11,25 МГц; $f_{д5}$=7,5 МГц .

Обосновать выбор минимальной частоты дискретизации, при которой нет перекрытия отдельных копий прямого и инверсного спектра.

№4. Спектр $X(f)$ некоторого полосового радиосигнала $x(t)$ изображен на рисунке ниже, f_0 — несущая частота, $f_0 \gg 2f_в$, $2f_в = 4{,}5$ кГц, $f_0 = 32{,}5$ кГц.



Изобразить по модулю спектр сигнала после субдискретизации с наименьшей возможной частотой $f_д$, обеспечивающей центрирование спектра субдискретизуемого сигнала в полосе Найквиста.

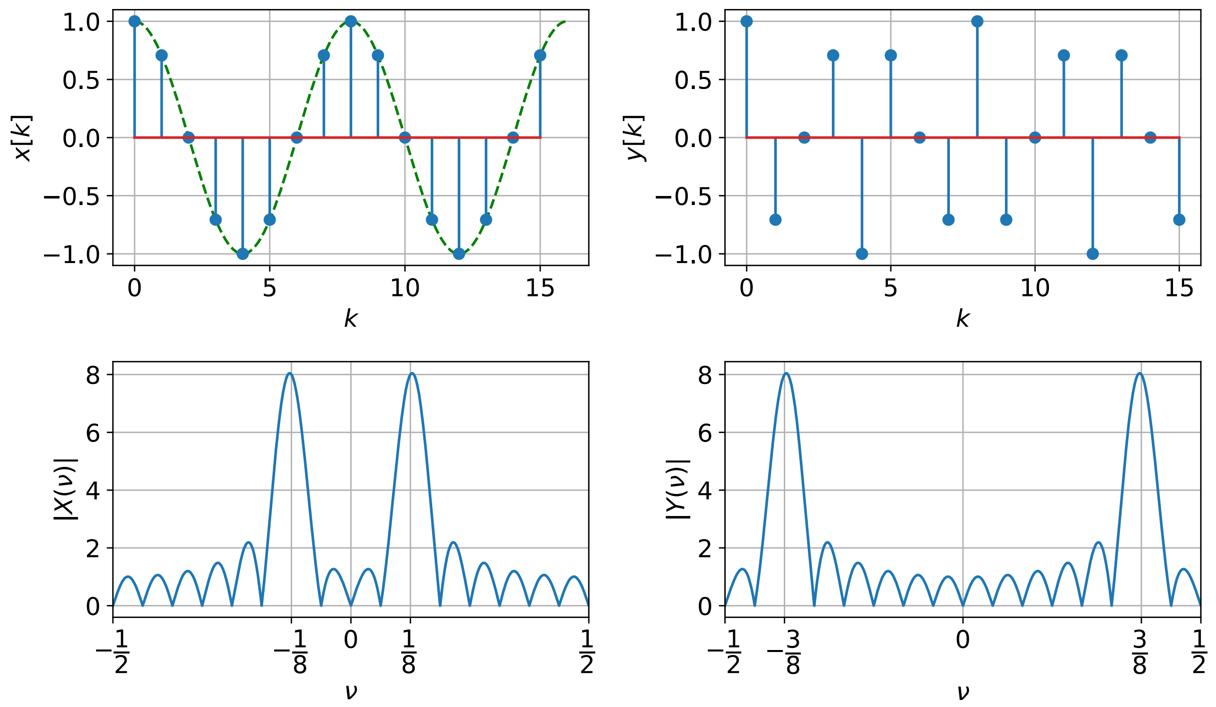
№5. Показать, что спектр действительного цифрового сигнала $x[k]$ можно инвертировать

$$Y(\nu) = X(\nu - 0{,}5)$$

путем изменения знака каждого второго отсчета сигнала $x[k]$

$$y[k] = (-1)^k x[k], \; k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Примечание. На рисунке ниже представлен пример инверсии спектра для последовательности $x[k] = \cos(2\pi\nu_0 k)), \nu_0 = 1/8, 0 \le k < 16$.



Задачи с лекции

Перечень контрольных вопросов по разделу 7 «Методы преобразования узкополосных радиосигналов из аналоговой формы в цифровую» для подготовки к экзамену.

1. За счет чего при квадратурной дискретизации узкополосного радиосигнала требуемая частота дискретизации существенно ниже, чем необходимая по теореме отсчетов?
2. Как связаны спектр полосового радиосигнала и спектр аналитического сигнала?
3. Какое условие на выбор частоты дискретизации должно быть выполнено, чтобы дискретизация аналитического сигнала для полосового радиосигнала происходила без перекрытия отдельных копий спектра?
4. В чем заключается субдискретизация полосового радиосигнала?
5. Получите условия на выбор частоты дискретизации для реализации субдискретизации.

Список литературы

[1] Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. Часть 1. М.: МФТИ, 2007.

2.8 «Дискретизация полосовых радиосигналов».

[2] Кестер У. Проектирование систем цифровой и смешанной обработки сигналов. М.: Техносфера. 2010.

[3] Макс Ж. и др. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2-х т.: Пер. с фр. – Мир, 1983. – Т. 1. – С. 312.

(см. 7.8 «Субдискретизация. Обобщение теоремы Шеннона», материал изложен на основе работы «Fauque J. M. et al. Analyse spectrale par correlation. – 1969.)

[4] Д.Ю. Бобров, А.П. Доброжанский, Г.В. Зайцев и др. Цифровая обработка сигналов в многофункциональных РЛС // Цифровая обработка сигналов. №4 2001, №1 2002, № 2 2002.

см. http://www.dspa.ru/articlies/allart.php#artdev2

Задачи с лекции

Информация о контрольной работе №4

28 апреля 2025 г. в часы лекции в 115 КПМ будет письменная контрольная работа №4 по материалам лекций блока 4 "Многоскоростная обработка сигналов, методы преобразования узкополосных радиосигналов из аналоговой формы в цифровую" (лекции с 31 марта 2025 г. по 21 апреля 2025 г.).

Примерное содержание варианта контрольной работы.

Задача №1.	Многоскоростная обработка сигналов.
Задача №2.	Дискретизация аналитического сигнала. Квадратурная дискретизация.
Задача №3.	Субдискретизация полосовых радиосигналов.

- На контрольной работе запрещается:
  а) общаться, в т.ч. онлайн, включать мессенджер (даже на соседней вкладке),
  б) фотографировать (вариант, решение),
  в) использовать фотографии решений,
  г) передавать однокурсникам вариант, или что-либо, касающееся решений и доп. материалов,

<u>При нарушении этих правил контрольная работа оценивается в 1 балл из 10 (явка).</u>

- При опоздании на контрольную работу дополнительное время не добавляется.
- Необходимо подписать вариант и все листы решения.
- Правило оценки: каждая задача оценивается от 0 до 3 баллов. Дополнительный балл выставляется при условиях, что к оформлению работы отсутствуют какие-либо замечания, и минимум две задачи оценены в полный балл. Контрольная работа оценивается от 1 до 10 баллов.
- Основные требования к оформлению графиков.
  - Все оси графиков должны быть подписаны.
  - На графиках должна присутствовать шкала.
  - Для размерных численных значений (частоты, времени) должна быть указана единица измерений.
  - Не допускается указывать для дельта-функции «значение в точке» вместо веса.