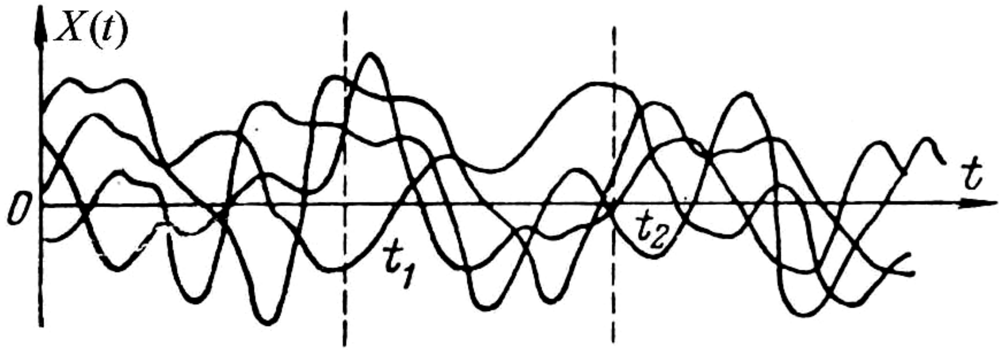
Лекция 6 по курсу «Цифровая обработка сигналов»

10 марта 2025 г.

5.8. Случайные процессы (краткое введение).

Стационарные случайные процессы. Эргодичность.
Спектральная плотность мощности (случай непрерывного времени).
Теорема Винера–Хинчина (случай непрерывного времени).
Фильтрация случайных процессов.



5.9. Дискретизация случайных сигналов.

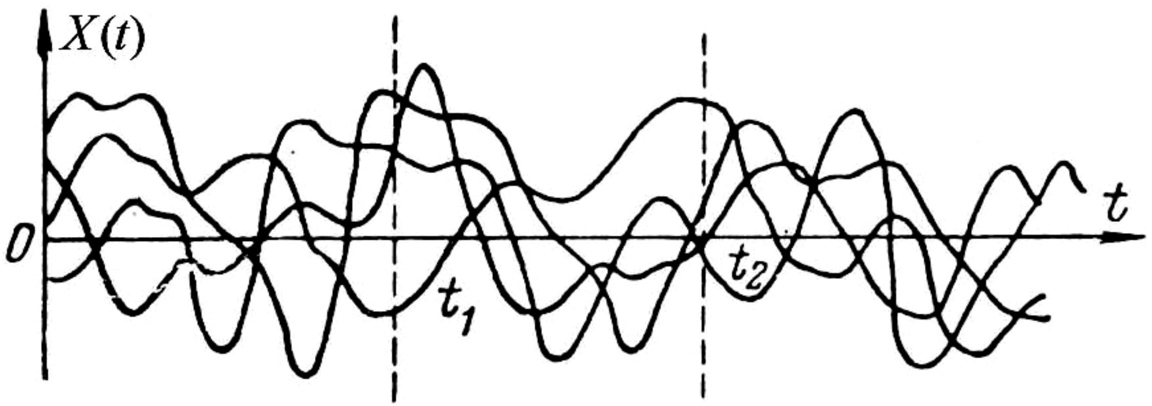
Понятие непрерывности случайного процесса.
Теорема Котельникова для случайного сигнала.
Дискретный случайный процесс и его характеристики
(среднее значение, автокорреляция, автоковариация, взаимная корреляция,
взаимная ковариация, спектральная плотность мощности).
Теорема Винера–Хинчина (случай дискретного времени).

Разделы 5.8 и 5.9 необходимы для изложения методов спектрального анализа случайных последовательностей (п.5.10).

5.8. Случайные процессы (краткое введение).

Основные понятия

Случайный процесс $X(t)$ представляет собой ансамбль выборочных функций времени, подчиняющихся некоторой общей статистической закономерности. Каждая из функций этого ансамбля называется *реализацией* случайного процесса.



Случайный сигнал можно рассматривать как функцию двух аргументов:

$$x(a,t),\ a \in \Omega,\ t \in T.$$

Первый аргумент a является элементарным событием и принадлежит пространству Ω элементарных событий с заданной на нем вероятностной мерой.

Аргумент t имеет обычно смысл времени и принадлежит множеству T. Аргумент t может быть непрерывным или дискретным, а множество T может быть как конечным, так и бесконечным. В соответствии с этим $x(a,t)$ – непрерывный или дискретный сигнал.

Случайный сигнал $x(a,t)$ обычно обозначается как $x(t)$. Но при это необходимо помнить, что конкретной реализации $x(t)$ соответствует точка в выборочном пространстве Ω.

Случайные процессы, реализации которых зависят от конечного числа параметров, называются *квазидетерминированными.* Пример — процесс, описываемый гармоническим сигналом $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, у которого один из трёх параметров $A,\ \omega,\ \varphi$ – случайная величина, принимающая определённое значение в каждой реализации

Задание одномерной плотности вероятности

Задание одномерной плотности вероятности

$p(\mathbf{x}, t_k)$ – одномерная плотность вероятности случайной величины $\mathbf{x}(t_k)$, относящаяся к одному моменту времени $t = t_k$ (одному сечению процесса).

Задание одномерной плотности позволяет произвести статистическое усреднение (усреднение по ансамблю) как самой величины $\mathbf{x}$, так и любой функции $f(\mathbf{x})$.

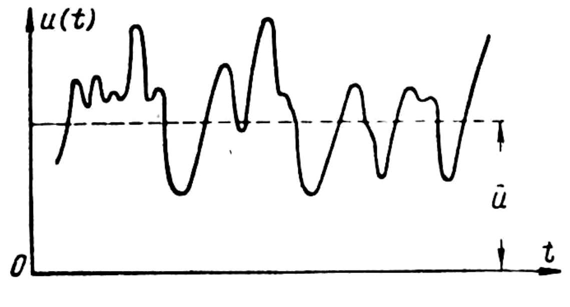
Для практических приложений важными являются следующие параметры случайного процесса $X(t)$:

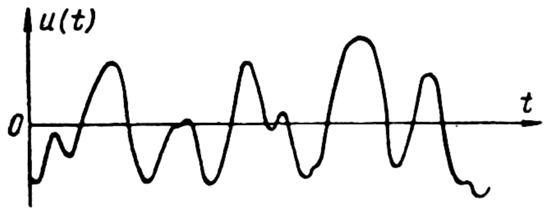
математическое ожидание

$$m_X(t) = \overline{\mathbf{x}}(t) = M[\mathbf{x}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}\, p(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}; \qquad (1)$$

дисперсия

$$\sigma_X^2(t) = M\left[\left(\mathbf{x}(t) - m_X(t)\right)^2\right]. \qquad (2)$$





Флуктуационный процесс: а – с постоянной составляющей; б – со средним значением, равным нулю.

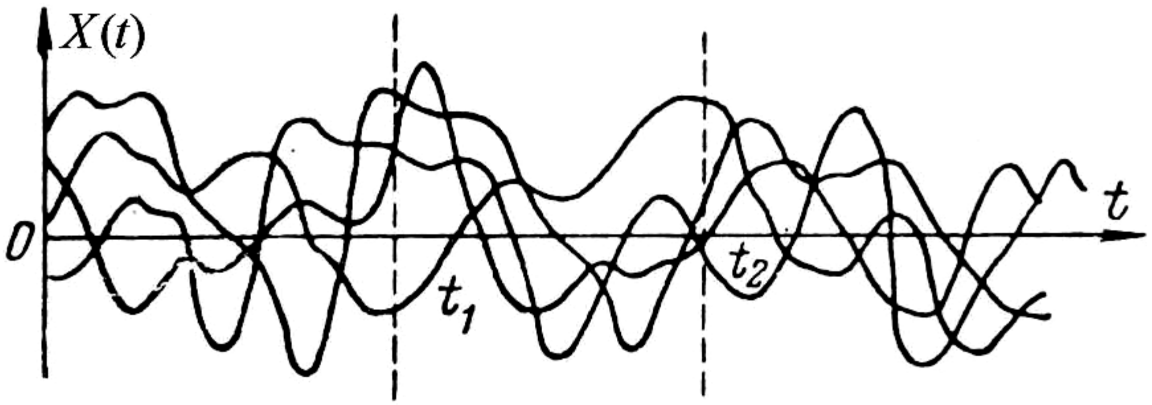
Среднее значение определяет «центр тяжести» распределения в каждый момент времени t. Дисперсия является мерой расплывчатости или разброса относительно центра тяжести также в каждый момент времени t.

Задание двумерной плотности вероятности

Более полной вероятностной характеристикой процесса является двумерная плотность вероятности

$$p(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2;\ t_1,\ t_2),$$

определяющая связь значений $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2)$, принимаемых случайной функцией $X(t)$ в произвольно выбранные моменты времени t_1 и t_2.



Для пар значений процесса в разнесённые моменты t_1 и t_2, удобно ввести так называемую *корреляционную функцию* случайного процесса:

$$R_X(t_1, t_2) = M[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)]. \qquad (3)$$

Замечание. Для комплексного случайного процесса $X(t)$ корреляционная функция:

$$R_X(t_1, t_2) = M[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}^*(t_2)]. \qquad (4)$$

В соответствии с (3) корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ представляет собой усреднённое по ансамблю произведение значений случайной функции $X(t)$ в моменты времени t_1 и t_2.

Для каждой реализации $x(t)$ случайного процесса произведение $x(t_1)\cdot x(t_2)$ является некоторым числом.

Ансамбль реализаций образует множество случайных чисел, распределение которых характеризуется двумерной плотностью вероятности $p(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2;\ t_1,\ t_2)$. При заданной функции $p(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2;\ t_1,\ t_2)$ усреднение по ансамблю в (3) можно выполнить по формуле

$$R_X(t_1,\ t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\, p(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2;\ t_1,\ t_2)\, d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \qquad (5)$$

Стационарные случайные процессы. Эргодичность.

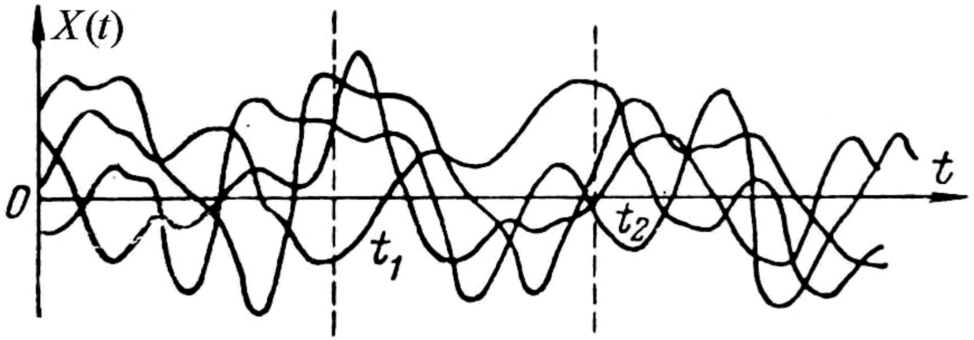
При нулевом расстоянии между моментами t_1 и t_2 корреляционная функция определяет величину среднего квадрата случайного процесса при $t = t_1$:

$$R_X(t_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_1^2 p(\mathbf{x}_1;\ t_1) d\mathbf{x}_1 = M[\mathbf{x}^2(t)]. \tag{6}$$

Корреляционная функция центрированного случайного процесса называется *ковариационной функцией*:

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= M\left[\left(\mathbf{x}(t_1) - \overline{\mathbf{x}}(t_1)\right)\left(\mathbf{x}(t_2) - \overline{\mathbf{x}}(t_2)\right)\right] = \\ &= R_X(t_1, t_2) - \overline{\mathbf{x}}(t_1)\overline{\mathbf{x}}(t_2). \end{aligned} \tag{7}$$

Стационарные случайные процессы



В практических приложениях важное место занимают *стационарные* случайные процессы. Различают стационарность в узком и широком смысле.

Случайный процесс называется *стационарном в узком смысле* (строго стационарным), если его плотность вероятности

$$p\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n;\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$$

произвольного порядка *n* зависит только от интервалов $t_2 - t_1,\ t_3 - t_1,\ \ldots,\ t_n - t_1$ и не зависит от начала отсчета времени.

В приложениях обычно ограничиваются требованием независимости от начала отсчета времени только одномерного и двумерного законов распределения $p(\mathbf{x}, t_k)$ и $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2;\ t_1,\ t_2)$.

Случайный процесс называется *стационарном в широком смысле*[1] (стационарным по Хинчину), если его одномерная и двумерная плотности вероятности не зависят от временного сечения случайного процесса, а двумерная плотность вероятности определяется только сдвигом по времени.

[1] Стационарностью в широком смысле обладает довольно большой класс случайных процессов, встречающихся на практике. Поэтому слова “в широком смысле” часто опускают и называют процессы стационарными.

Стационарные случайные процессы. Эргодичность.

Для стационарного в широком смысле случайного процесса выражения (1)– (4) записываются без обозначения фиксированных моментов времени.

Математическое ожидание

$$m_X = \bar{\mathbf{x}} = M(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}\, p(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \qquad (8)$$

Дисперсия

$$\sigma_X^2 = M\left[\mathbf{x} - m_X\right]^2. \qquad (9)$$

Автокорреляционная функция

$$R_X(\tau) = M\left[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)\, p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau, \tau)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{x}_\tau \qquad (10)$$

Автоковариационная функция

$$K_X(\tau) = M\left[(\mathbf{x}(t) - m_X)\cdot(\mathbf{x}(t+\tau) - m_X)\right] = R_X(\tau) - m_X^2. \qquad (11)$$

Автокорреляционная функция стационарного случайного процесса $R_X(\tau)$ – четная функция, зависящая от временного сдвига $\tau = t_2 - t_1$. При этом она не зависит от самих моментов времени t_1 и t_2. Для $\tau = 0$ получаем

$$R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^2 p(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}^2}. \qquad (12)$$

Эргодичность

Стационарный случайный процесс называют *эргодическим*, если при определении его статистических характеристик усреднение по ансамблю реализаций эквивалентно усреднению по времени одной реализации, теоретически бесконечной длины.

Используя эргодичность, можно проанализировать статистические характеристики процесса путем усреднения по времени вдоль одной реализации. Обозначая усреднение по времени как $\langle\cdot\rangle$, запишем характеристики (8)–(11), построенные по одной реализации $x(t)$.

Среднее значение

$$\hat{m}_x = \langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt \qquad (13)$$

равно постоянной составляющей выбранной реализации.

Дисперсия

$$\hat{\sigma}_x^{\,2} = \left\langle \left(x(t) - \hat{m}_x\right)^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left(x(t) - \hat{m}_x\right)^2 dt \qquad (14)$$

имеет смысл *мощности флуктуационной составляющей эргодического процесса.*

Корреляционная функция

$$\widehat{R}_x(\tau)=\langle x(t)x(t+\tau)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)x(t+\tau)dt, \qquad (15)$$

при этом

$$\widehat{R}_x(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2(t)dt$$

– средняя мощность реализации.

Ковариационная функция

$$\widehat{K}_x(\tau)=\langle(x(t)-m_x)(x(t+\tau)-m_x)\rangle=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}(x(t)-m_x)(x(t+\tau)-m_x)dt. \qquad (16)$$

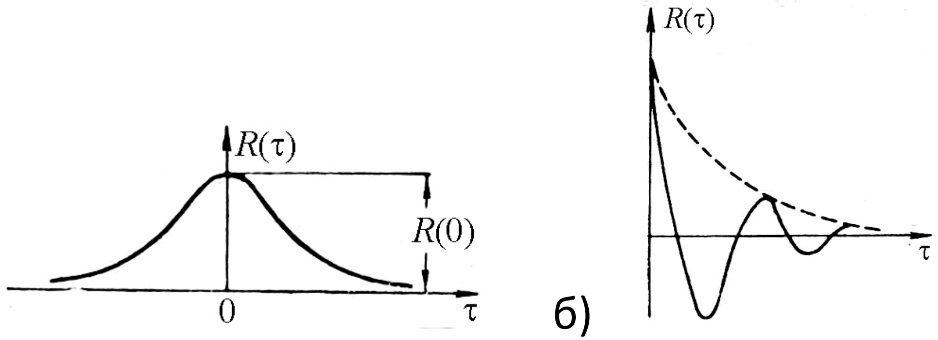
Примечание. *Любая из перечисленных характеристик эргодического случайного процесса, полученная усреднением за большой, но конечный интервал T, является случайной относительно ансамбля оценкой.*

Достаточным условием эргодичности по математическому ожиданию стационарного случайного процесса является условие:

$$\lim_{\tau\to\infty}R_X(\tau)=0. \qquad (17)$$

Условие эргодичности по математическому ожиданию Слуцкого

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}R_X(\tau)\,d\tau=0. \qquad (18)$$



а) б)

Примеры корреляционных функции центрированных процессов

Приближение $R_X(\tau)$ к нулю не всегда происходит монотонно. В ряде случаев $R_X(\tau)$ колеблется около нулевого значения, приближаясь к нему при увеличении τ (рис. *б*).

Если процесс имеет постоянную составляющую, то

$$R_X(\infty)=\langle x(t)x(t+\tau)\rangle=\langle x(t)\rangle\langle x(t)\rangle=\langle x(t)\rangle^2, \qquad (19)$$

т. е. корреляционная функция при $\tau\to\infty$ стремится к квадрату постоянной составляющей.

Спектральная плотность мощности
(случай непрерывного времени)

Ограничим длительность реализаций случайного сигнала:

$$x_T(t)=\begin{cases} x(t), & |t|\le \dfrac{T}{2}<\infty, \\ 0, & |t|>\dfrac{T}{2}. \end{cases} \qquad (20)$$

Если исходный стационарный процесс $X(t)$ имеет ограниченную дисперсию, то $x_T(t)$ будет удовлетворять строгому требованию интегрируемости в квадрате:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2\, dt<\infty. \qquad (21)$$

Следовательно, для $x_T(t)$ будет существовать преобразование Фурье:

$$X(f,T)=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-j2\pi ft}dt,\ T<\infty. \qquad (22)$$

Энергия рассматриваемого отрезка по равенству Парсеваля:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x^2{}_T(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f,\ T)|^2\, df.$$

Разделив обе части на T, получим выражение для средней мощности реализации $x(t)$ на отрезке T:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2{}_T(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|X(f,\ T)|^2\, df \qquad (23)$$

Если процесс эргодический, то эта величина при $T\to\infty$ приближается к значению среднего квадрата случайного процесса. Необходимо напомнить, что $X(f,T)$ является <u>случайной</u> относительно ансамбля реализации случайного процесса $X(t)$.

Выполнив сначала усреднение обеих частей выражения (23), а потом, переходя к пределу при $T\to\infty,$ с учетом эргодичности получаем

$$M\left\{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T^2 dt\right\}=M\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|X(f,T)|^2}{T}df\right\},$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\overline{x_T^2}dt=\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M\left[|X(f,T)|^2\right]}{T}df,$$

$$\overline{x^2(t)}=\int_{-\infty}^{\infty}G(f)df, \qquad (24)$$

Спектральная плотность мощности (случай непрерывного времени).

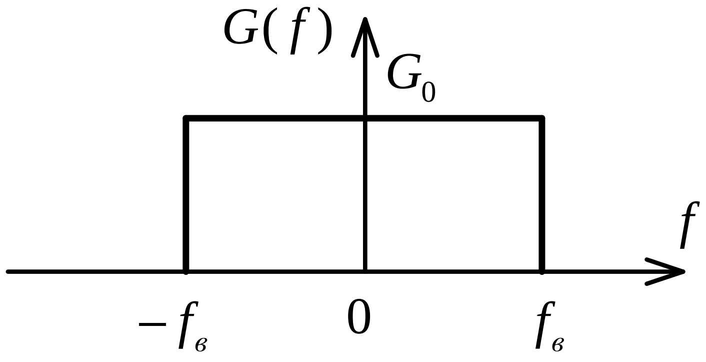
$$G(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} M\left|X(f,T)\right|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} M\left|\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi ft}dt\right|^2 \qquad (25)$$

$G(f)$ называется *спектральной плотностью мощности (СПМ)* случайного процесса $X(t)$. Из (25) следует, что $G(f)$ является вещественной неотрицательной функцией частоты.

Если $x(t)$ – напряжение или ток, действующие на сопротивлении 1 Ом, то $\overline{x^2(t)}$ – есть средняя мощность, рассеиваемая на этом резисторе. Спектральную плотность мощности $G(f)$ можно интерпретировать как среднюю мощность, сосредоточенную в полосе частот шириной 1 Гц при центральной частоте f Гц.

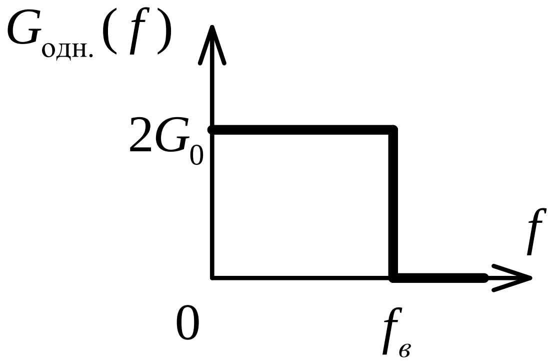
Отметим, что иногда определяют СПМ, приходящуюся только на положительные частоты — одностороннюю спектральную плотность мощности. Связь между односторонней $G_{\text{одн.}}(f)$ и двухсторонней $G(f)$ СПМ имеет вид: $G_{\text{одн.}}(f) = 2G(f)$, при $f \geq 0$.

Пример. Предположим, что для некоторого случайного процесса СПМ $G(f)$ (двухсторонняя) изображена на рисунке ниже.



Односторонняя СПМ, приходящаяся только на положительные частоты, определяется формулой

$$G_{\text{одн.}}(f) = 2G(f), \text{ при } f \geq 0.$$



Теорема Винера–Хинчина (случай непрерывного времени)

Теорема Винера–Хинчина (случай непрерывного времени)

Теорема Винера–Хинчина устанавливает связь между корреляционной функцией $R(\tau)$ и спектральной плотностью мощности $G(f)$ и утверждает, что эти характеристики стационарного случайного процесса связаны парой преобразования Фурье

$$G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau, \qquad (26)$$

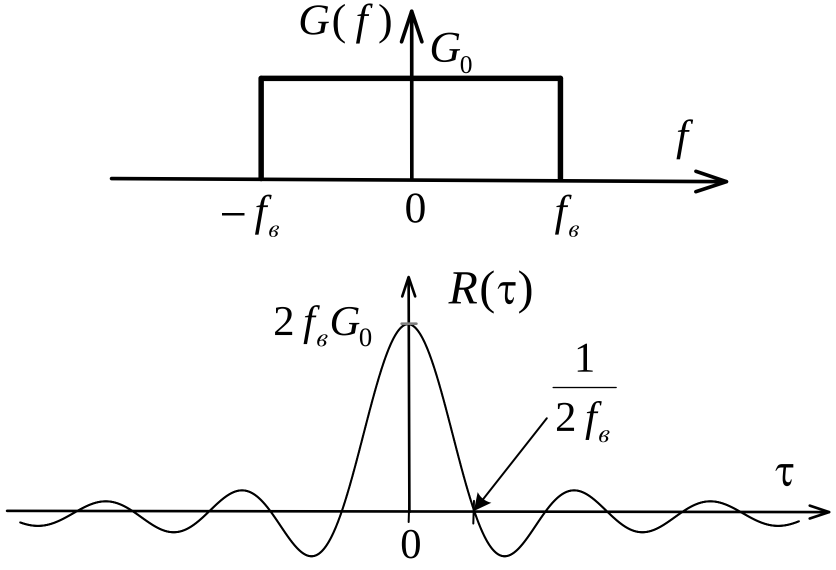
$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi f\tau}df. \qquad (27)$$

Поскольку $R(\tau)$ – чётная функция аргумента τ, то соответствующий спектр мощности $G(f)$ представляет собой чётную функцию частоты. Отсюда следует, что пара формул (26) и (27) может быть записана в виде

$$G(f)=2\int_{0}^{\infty} R(\tau)\cos\left(2\pi f\tau\right)d\tau, \qquad (28)$$

$$R(\tau)=2\int_{0}^{\infty} G(f)\cos\left(2\pi f\tau\right)df. \qquad (29)$$

Пример. Рассмотрим случайный процесс, СПМ которого $G_0=const$ на отрезке частот $[-f_в,\ f_в]$ и равна нулю за его пределами.



Корреляционную функцию этого процесса можно определить как по формуле (27):

$$R(\tau)=G_0\int_{-f_в}^{f_в} e^{j2\pi f\tau}df=\left.\frac{G_0e^{j2\pi f\tau}}{2j\pi\tau}\right|_{-f_в}^{f_в}=\frac{G_0}{\pi\tau}\sin\left(2\pi f_в\tau\right),$$

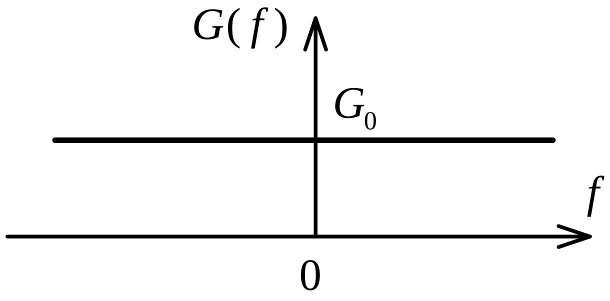
так и по (29):

$$R(\tau)=2\int_{0}^{\infty} G(f)\cos(2\pi f\tau)df=\left.\frac{2G_0\sin(2\pi f\tau)}{2\pi\tau}\right|_{0}^{f_в}=\frac{G_0}{\pi\tau}\sin\left(2\pi f_в\tau\right).$$

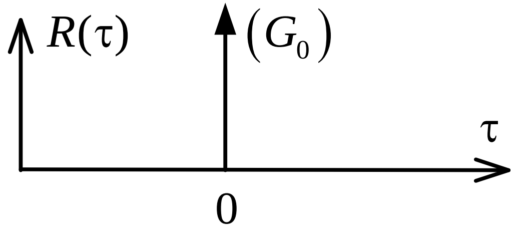
Пример. Белый шум в непрерывном времени.

Пример (белый шум в непрерывном времени). Рассмотрим белый шум – эргодический случайный процесс, любые два временных сечения которого некоррелированы между собой.

Для белого шума СПМ $G_0 = const$ для всех частот.



Корреляционная функция белого шума $R(\tau) = G_0\,\delta(\tau)$.



Действительно, если $R(\tau) = G_0\,\delta(\tau)$, то

$$G(f) = G_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = G_0 e^0 = G_0 = const.$$

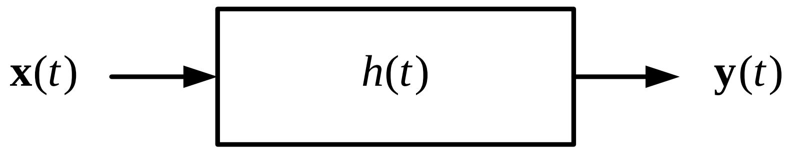
Белый шум является дельта-коррелированным: любые два различных сечения процесса некоррелированы между собой.

Белый шум физически нереализуем, однако он часто используется в качестве математической модели многих процессов, например, когда полоса пропускания системы, на которую воздействует широкополосный случайный сигнал, много меньше ширины спектра шума.

Фильтрация случайных процессов

Фильтрация случайных процессов

Пример. Пусть стационарный процесс $\mathbf{x}(t)$ пропускается через ЛИВ-фильтр (линейный инвариантный во времени фильтр) с импульсной характеристикой $h(t)$.



Процесс на выходе $\mathbf{y}(t)$ также стационарен.

Взаимокорреляционная функция процессов на входе и выходе фильтра

$$R_{xy}(\tau) = M[\mathbf{y}(t+\tau)\cdot\mathbf{x}^*(t)] = M\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-\theta)\mathbf{x}(\theta)d\theta\cdot\mathbf{x}^*(t)\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-\theta)R_{xx}(\theta-t)d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-\eta)R_{xx}(\eta)d\eta.$$

Автокорреляционная функция процесса на выходе фильтра:

$$R_{yy}(\tau) = M[\mathbf{y}(t+\tau)\mathbf{y}^*(t)] =$$

$$= M\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-\theta)\mathbf{x}(\theta)h^*(t-\eta)\mathbf{x}^*(\eta)d\theta d\eta\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-\theta)h^*(t-\eta)R_{xx}(\theta-\eta)d\theta d\eta.$$

Обозначим $\theta-\eta=s$ и $\lambda(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau+\eta)h^*(\eta)d\eta$.

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\tau-s)R_{xx}(s)ds, \qquad (30)$$

Автокорреляционные функции $R_{yy}(\tau)$ и $R_{xx}(s)$ связаны интегралом свёртки. В спектральной области

$$G_{yy}(f) = |H(f)|^2\cdot G_{xx}(f), \qquad (31)$$

где

$$G_{yy}(f) = \Pi\Phi\left[R_{yy}(\tau)\right]$$

– спектральная плотность мощности процесса на выходе фильтра,

$$G_{xx}(f) = \Pi\Phi\left[R_{xx}(s)\right]$$

– спектральная плотность мощности входного процесса,

$$|H(f)|^2 = H(f)\cdot H^*(f),$$
$$H(f) = \Pi\Phi[h(t)]$$

– частотная характеристика фильтра.

Понятие непрерывности случайного процесса

5.9. Дискретизация случайных сигналов.

Понятие непрерывности случайного процесса.

Введём понятие непрерывности случайного процесса. Случайный процесс называется *непрерывным* в точке t *в среднеквадратическом,* если

$$\lim_{\varsigma\to 0} M\left\{\left|x(t+\varsigma)-x(t)\right|^2\right\}=0. \qquad (32)$$

Случайный процесс, непрерывный при всех значениях t на некотором интервале, называется непрерывным на этом интервале.

Необходимым и достаточным условием непрерывности стационарного случайного процесса при любом t является непрерывность его корреляционной функции при $\tau = 0$.

Это означает, что

$$\lim_{\tau\to 0} R_x(\tau)=R_x(0)=M[x^2(t)]<\infty. \qquad (33)$$

Иначе говоря, процессы с конечной средней мощностью непрерывны.

Из непрерывности в среднеквадратическом следует *непрерывность по вероятности*:

$$\lim_{\varsigma\to 0} P\left\{\left|x(t+\varsigma)-x(t)\right|\geq\varepsilon\right\}=0,\ \varepsilon>0. \qquad (34)$$

Дискретный случайный процесс

Теорема Котельникова для случайного сигнала.

Пусть $x(t)$ – реализация непрерывного стационарного процесса, спектральная плотность мощности которого $G(f)$ есть непрерывная функция частоты, тождественно равная нулю вне полосы частот $|f| \le f_в$. Покажем, что для такого процесса в среднеквадратическом смысле выполняется равенство

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \cdot \frac{\sin 2\pi f_в (t - k\Delta t)}{2\pi f_в (t - k\Delta t)}, \;\; \Delta t = \frac{1}{2 f_в}. \qquad (35)$$

Обозначим

$$\phi_k(t) = \frac{\sin 2\pi f_в (t - k\Delta t)}{2\pi f_в (t - k\Delta t)}.$$

Тогда

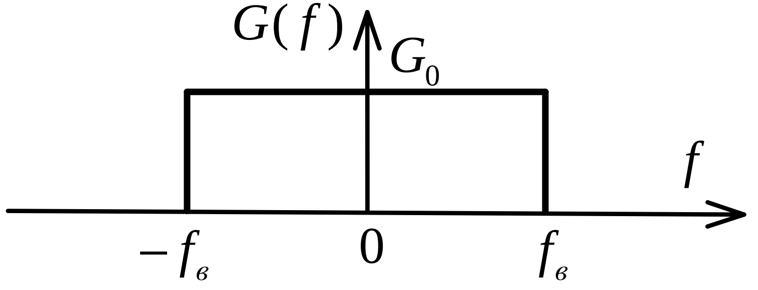
$$M\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\phi_k(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\Delta t)\phi_m(t+\tau) \right] =$$

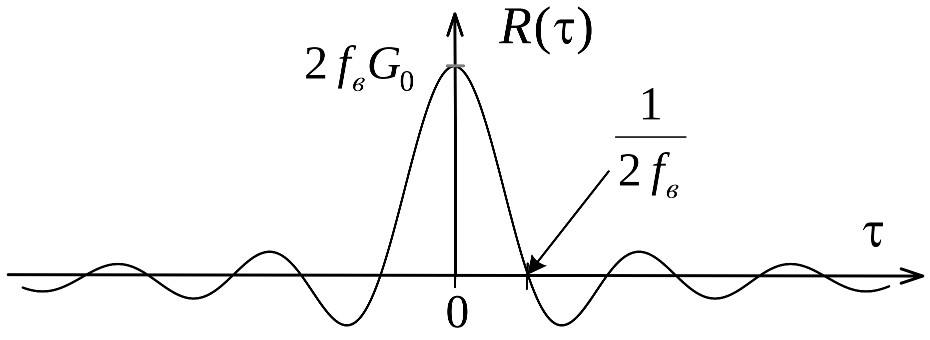
$$= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x[(k-m)\Delta t]\phi_k(t)\phi_m(t+\tau) \right] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x(n\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_в (\tau - n\Delta t)}{2\pi f_в (\tau - n\Delta t)} = R_x(\tau).$$

Последнее равенство обусловлено тем, что спектральная плотность $G(f)$ ограничена полосой частот $|f| \le f_в$.

Равенство (35) означает, что непрерывный в среднеквадратичном стационарный случайный процесс с ограниченным спектром мощности может быть представлен счётным множеством случайных величин $x(k\Delta t), k \in \mathbb{Z}$, $\Delta t = 1/(2 f_в)$. Это представление точно в том смысле, что средний квадрат ошибки равен нулю.





Дискретный случайный процесс

Дискретный случайный процесс

Дискретный случайный процесс можно рассматривать как *ансамбль* действительных или комплексных временных последовательностей.

Обозначим такой ансамбль $x[k;i]$, где $i - i$ -ая последовательность этого ансамбля, а k – индекс дискретного времени. При заданном i будем использовать сокращенное обозначение $x[k]$.

Для фиксированного k значения наблюдаемого отсчета $x[k]$.по всем последовательностям ансамбля (сечение в момент k) будет представлять некоторую случайную величину.

Вероятность того, что $x[k] \le a,$ описывается функцией распределения

$$F(a,\ k) = P(x[k] \le a).$$

Соответствующая плотность вероятности будет

$$p(a,\ k) = \frac{\partial F(a,\ k)}{\partial a}.$$

Среднее значение случайного процесса $x[k]$:

$$\overline{x}[k] = M\{x[k]\}$$

в общем случае зависит от момента k.

Автокорреляция случайного процесса

$$r_{xx}[k_1,\ k_2] = M\{x[k_1]x^*[k_2]\}.$$

Автоковариация, т. е. автокорреляция центрированного случайного процесса:

$$c_{xx}[k_1,\ k_2] = M\{(x[k_1] - \overline{x}[k_1])(x^*[k_2] - \overline{x}^*[k_2])\} =$$

$$= r_{xx}[k_1,\ k_2] - \overline{x}[k_1] \cdot \overline{x}^*[k_2].$$

Если среднее значение случайного процесса равно нулю при всех k, то автокорреляция и автоковариация такого процесса совпадают.

Дискретный случайный процесс

При рассмотрении двух различных случайных процессов $x[k]$ и $y[k]$ вводятся понятия *взаимной корреляции* (кросскорреляции):

$$r_{xy}[k_1,\ k_2] = M\left\{x[k_1]\cdot y^*[k_2]\right\}$$

и взаимной ковариации:

$$c_{xy}[k_1,\ k_2] = r_{xy}[k_1, k_2] - \overline{x}[k_1]\cdot \overline{y}^*[k_2].$$

Во всех выше приведенных определениях отражена явная зависимость от индекса времени.

Для стационарного в широком смысле эргодического дискретного случайного процесса среднее значение постоянно при всех k, а автокорреляция зависит только от разности $m = k_2 - k_1$:

$$\overline{x}[k] = \overline{x},$$

$$r_{xx}[m] = M\left[x[k+m]x^*[k]\right] \qquad (36)$$

r_{xx} – автокорреляционная последовательность (АКП).

Отметим следующие полезные на практике свойства АКП, справедливые при всех целых m:

$$r_{xx}[0] \geq \left|r_{xx}[m]\right|, \qquad (37)$$

$$r_{xx}[-m] = r_{xx}^*[m], \qquad (38)$$

Для дискретного случайного процесса с реализациями $x[k]$ СПМ определяется аналогично, как и для

$$G(f) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{(2N+1)\Delta t}M\left\{\left|\Delta t\ X(f)\right|^2\right\},$$

$$G(f) = \lim_{N\to\infty}\frac{\Delta t}{2N+1}M\left\{\left|X(f)\right|^2\right\}, \qquad (39)$$

где

$$X(f) = \sum_{k=-N}^{N} x[k]\exp(-j2\pi f\Delta t k).$$

Примечание. Выборки $x[k]$ необходимо умножить на Δt, если мы хотим получить связь между спектром аналогового $X_a(f)$ и дискретизованного сигнала $X_d(f)$ в виде

$$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_д).$$

Теорема Винера–Хинчина (случай дискретного времени)

Теорема Винера–Хинчина (случай дискретного времени)

Спектральная плотность мощности (СПМ) для случая дискретного времени определяется как дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ) автокорреляционной последовательности

$$G_{xx}(f) = \Delta t \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] e^{-j2\pi f m \Delta t}, \qquad (40)$$

где Δt – шаг дискретизации по времени. СПМ периодична по частоте с периодом $f_{\text{д}} = 1/\Delta t$ Гц. Функция СПМ описывает распределение мощности случайного процесса по частоте. Обратное ДВПФ

$$r_{xx}[m] = \int_{-1/2\Delta t}^{1/2\Delta t} G_{xx}(f) \cdot e^{j2\pi f m \Delta t} df. \qquad (41)$$

Пара ДВПФ (40) и (41) представляет теорему Винера–Хинчина для дискретного времени.

Поскольку $r_{xx}[-m] = r_{xx}^{*}(m)$, то СПМ должна быть действительной положительной функцией.

Если АКП – действительная функция, то $r_{xx}[-m] = r_{xx}[m]$ и СПМ – чётная функция частоты, и мы можем записать

$$G_{xx}(f) = 2\Delta t \sum_{m=0}^{\infty} r_{xx}[m] \cos 2\pi f m \Delta t. \qquad (42)$$

Приведём примеры дискретных случайных процессов.

Пример. Особый интерес представляет *дискретно-временной белый шум* $x[k]$, для которого $\overline{x}[k] = 0$,

$$r_{xx}[m] = \sigma_x^2 \cdot \mathbf{1}[m],$$

где $\mathbf{1}[m]$ – единичный импульс

$$\mathbf{1}[m] = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0, \end{cases}$$

σ_x^2 – дисперсия шума, равная $r_{xx}[0]$. При $m \neq 0$ белый шум не коррелирован сам с собой. СПМ белого шума

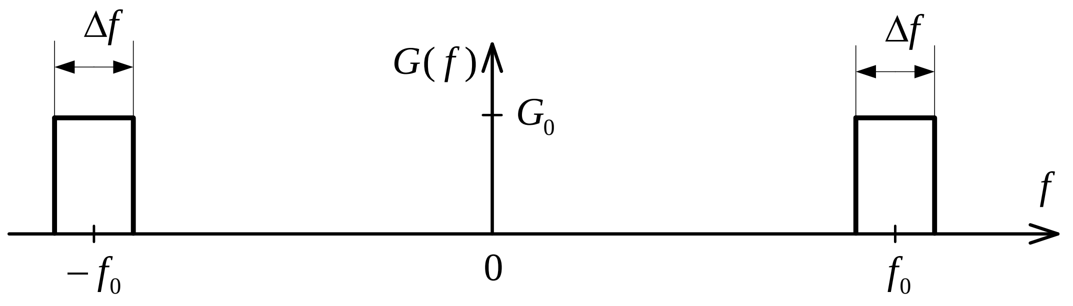
$$G_{xx}(f) = \Delta t \sigma_x^2$$

постоянна на всех частотах.

Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

№1. Определить корреляционную функцию $R(\tau)$ для стационарного случайного процесса с непрерывным временем с узкополосной спектральной плотностью мощности ($\Delta f << f_0$), изображенной на рисунке ниже.



№2. Случайный процесс с непрерывным временем имеет экспоненциальную функцию корреляции вида

$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \qquad \alpha > 0.$$

Определить и изобразить спектральную плотность мощности $G(f)$.

Список литературы

[1] Лекции по случайным процессам : учебное пособие / А. В. Гасников, Э. А. Горбунов, С. А. Гуз и др. ; под ред. А. В. Гасникова. М.: МФТИ, 2019. 285 с.

[2] Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. Часть 1. Москва. 2007г.

[3] Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале MATLAB: учеб. пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2021. 560 с.