

# Лекция 2 по курсу «Основы цифровой обработки сигналов»

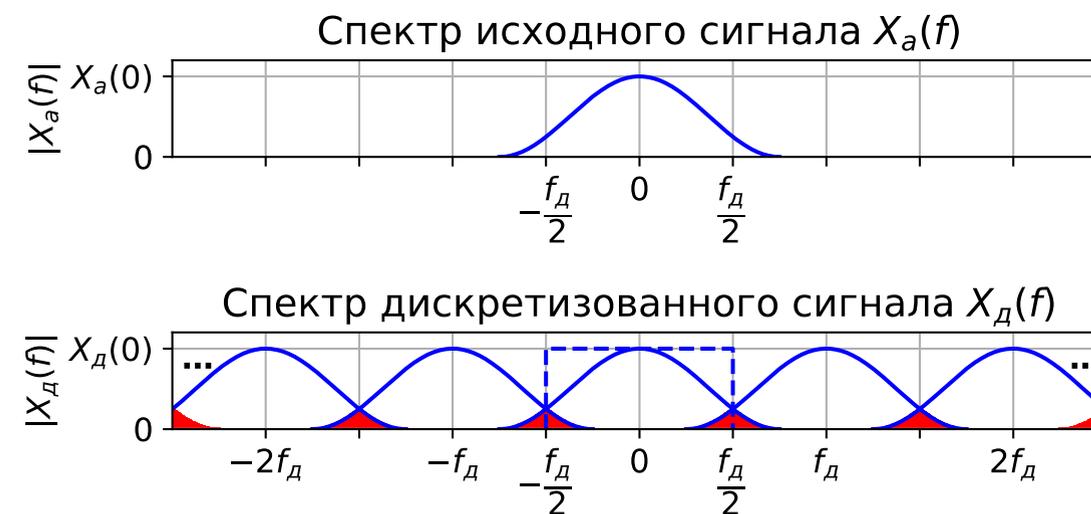
9 сентября 2024 г.

## 1.3. Дискретизация взятием отсчетов.

Спектр дискретизованного сигнала. Эффект наложения. Теорема Котельникова во временной области. Теорема отсчетов в частотной области. Особенности дискретизации синусоидальных сигналов.

## 1.4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).

Оценка спектра сигналов по последовательности его отсчетов. Четыре формы записи ДВПФ. Сходимость ДВПФ. Свойства ДВПФ.



# 1.3. Дискретизация взятием отсчетов.

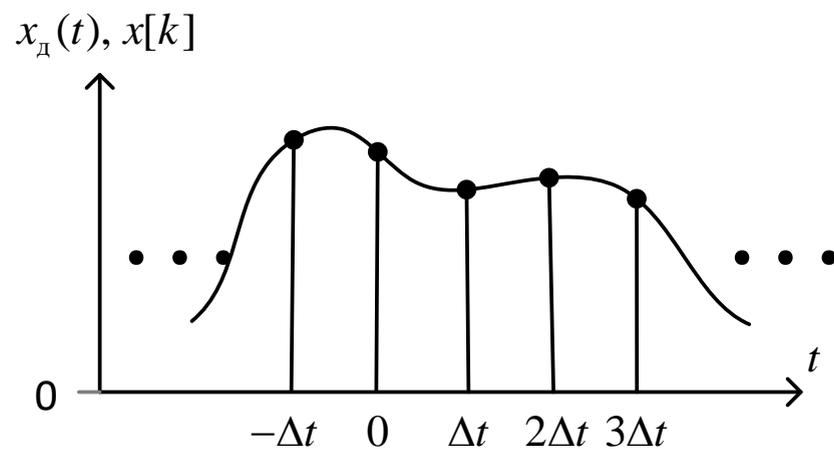
## Способы описания дискретных сигналов

### 1) Функция дискретного времени $k$ .

Это описание в виде последовательности отсчетов  $x[k]$  в заданные моменты времени  $k\Delta t$ ,  $k \in Z$ , где  $\Delta t$  — шаг дискретизации:

$$x[k] = Tx(k\Delta t), T \in \{1; \Delta t\}$$

где  $T$  — константа с размерностью времени, равная единице или  $\Delta t$ .

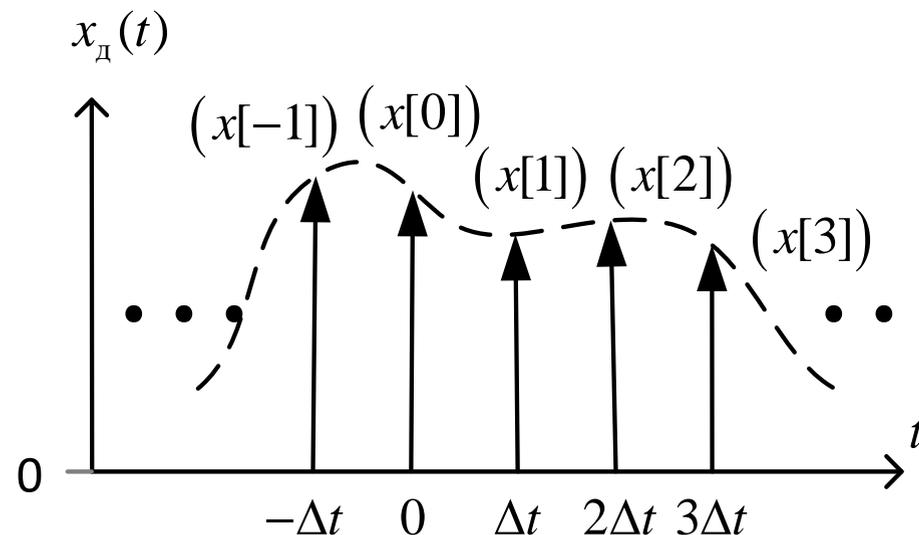


$k$	-1	0	1	2	3
$x[k]$	$x[-1]$	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$

### 2) Функция непрерывного времени $t$ (континуальная запись).

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t).$$

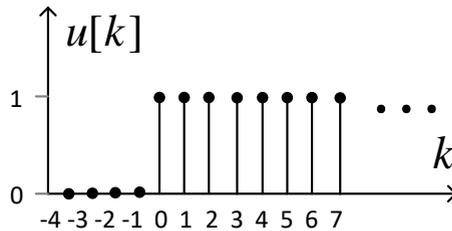
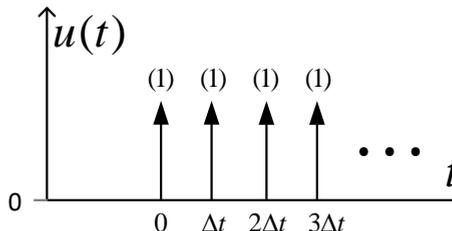
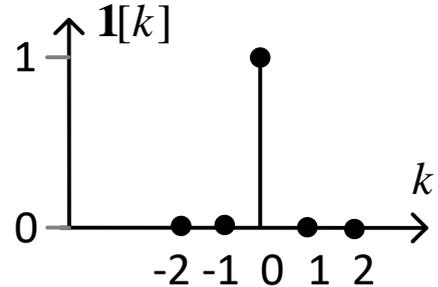
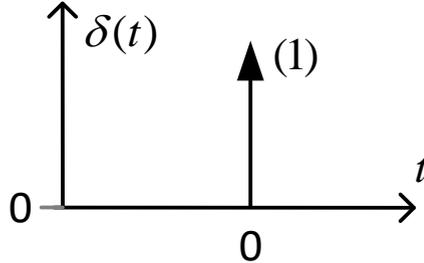
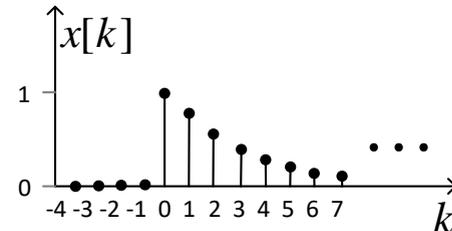
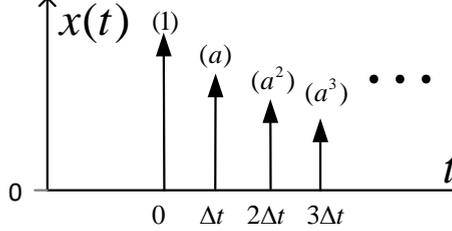
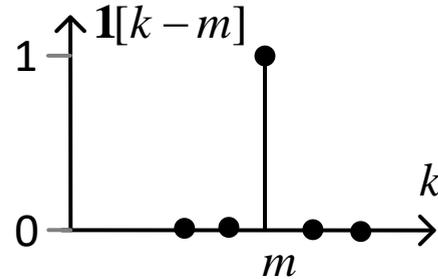
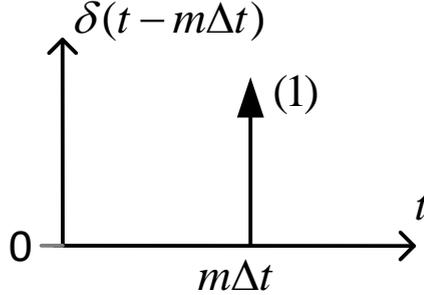
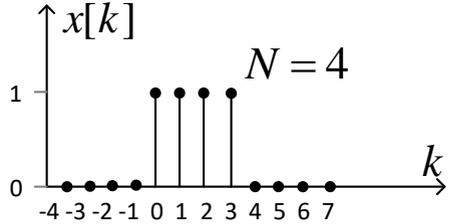
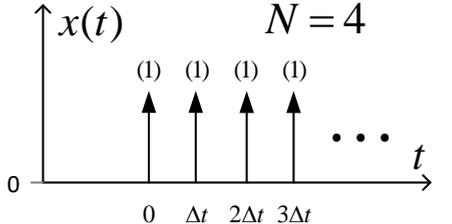
В этой записи дискретный сигнал представляет собой последовательность дельта-функций с площадями  $x[k]$ .



$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Tx(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t).$$

В такой форме сигнал можно подставить в преобразование Фурье.

# 1.3. Дискретизация взятием отсчетов.

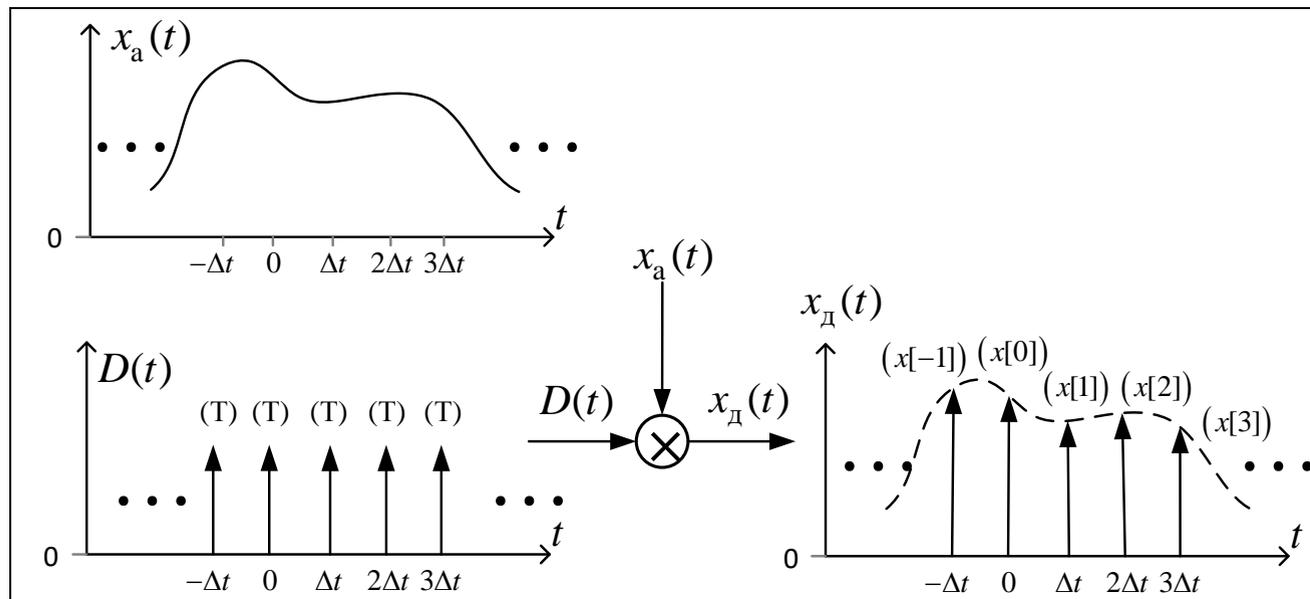
Дискретный сигнал	Описание в виде функции дискретного времени	Описание в виде функции непрерывного времени	Дискретная функция включения	$u[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$ 	$\sum_{m=0}^{\infty} \delta(t - m\Delta t)$ 
единичный импульс	$\mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$ 	$\delta(t)$ — дельта-функция Дирака 	Дискретная экспонента	$x[k] = \begin{cases} a^k, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$ 	$\sum_{m=0}^{\infty} a^m \delta(t - m\Delta t)$ 
Единичный импульс в точке $m$	$\mathbf{1}[k - m] = \begin{cases} 1, & \text{при } k = m, \\ 0, & \text{при } k \neq m. \end{cases}$ 	$\delta(t - m\Delta t)$ 	Последовательность из $N$ единичных импульсов	$x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k - m]$ 	$x(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(t - m\Delta t)$ 

# Спектр дискретизованного сигнала.

## Спектр дискретизованного сигнала $X_D(f)$

Континуальная форма записи дискретизованного сигнала

$$x_D(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) = D(t)x_a(t)$$



Идеальная функция дискретизации

$$D(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$

$D(t)$  — периодическая последовательность дельта-функций с периодом  $\Delta t$  и весами  $T$ .

Ряд Фурье для  $D(t)$

$$D(t) = C_m \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t),$$

коэффициенты Фурье

$$C_m = \frac{T}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \delta(t) dt = \frac{T}{\Delta t}.$$

В итоге

$$x_D(t) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(t) \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t).$$

По теореме сдвига для преобразования Фурье если  $x_a(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} X_a(f)$ , то  $x_a(t) \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} X_a(f - mf_D)$ .

Тогда

$$X_D(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_D).$$

# Эффект наложения.

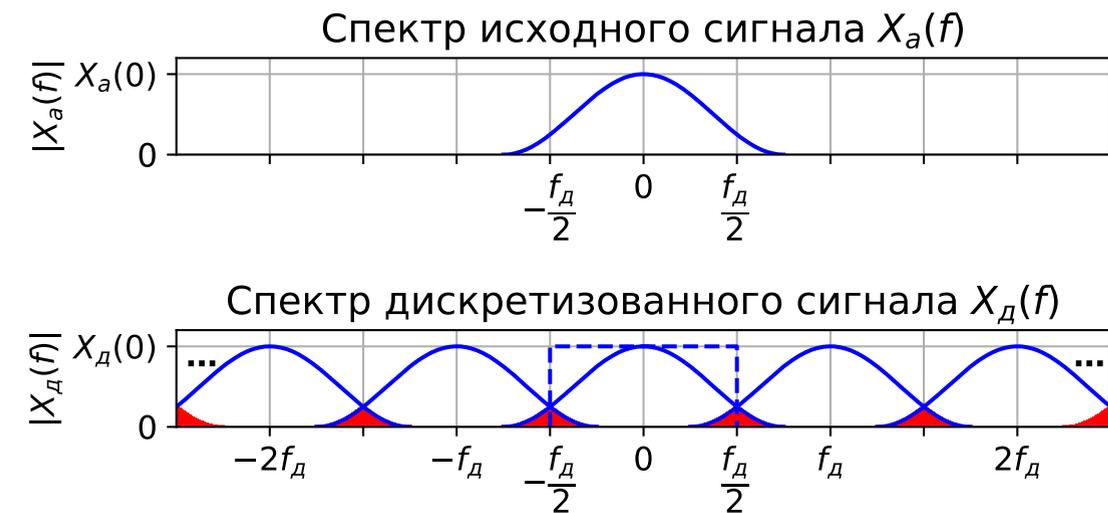
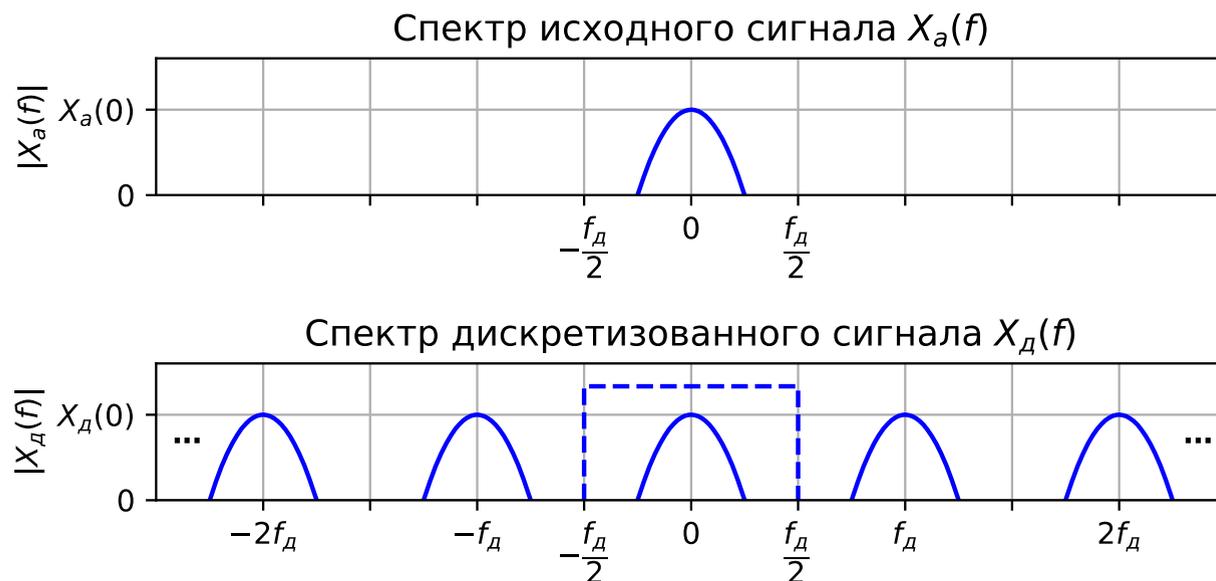
$$X_D(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_D).$$

$T = 1$ $x[k] = x(k\Delta t)$	спектр перед периодическим повторением масштабируется
$T = \Delta t$ $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$	$X_D(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_D)$ спектр периодически повторяется

## Эффект наложения

Если спектр аналогового сигнала до дискретизации не был ограничен интервалом  $[-f_D/2, f_D/2]$ , то возникает эффект наложения (англ. aliasing): спектр аналогового и дискретизованного на этом интервале не совпадают.

Частично устранить этот эффект можно применением фильтра нижних частот с частотой среза  $f_c = f_D/2$ , при этом информация о высокочастотных спектральных компонентах  $|f| > f_c$  не сохраняется.



# Теорема Котельникова во временной области.

## Теорема Котельникова во временной области.

Пусть  $f_B$  — верхняя граничная частота в спектре сигнала.

**Теорема отсчетов для сигнала с финитным спектром (Котельников 1933 г., Шеннон 1949 г.).** Если сигнал  $x(t)$

имеет спектр, ограниченный интервалом  $[-f_B, f_B]$ , и не содержит гармонических компонент на частотах  $\pm f_B$ <sup>1</sup>, то он представим с помощью своих дискретных отсчетов  $x(k\Delta t)$ ,

взятых с шагом  $\Delta t = \frac{1}{2f_B}$ :

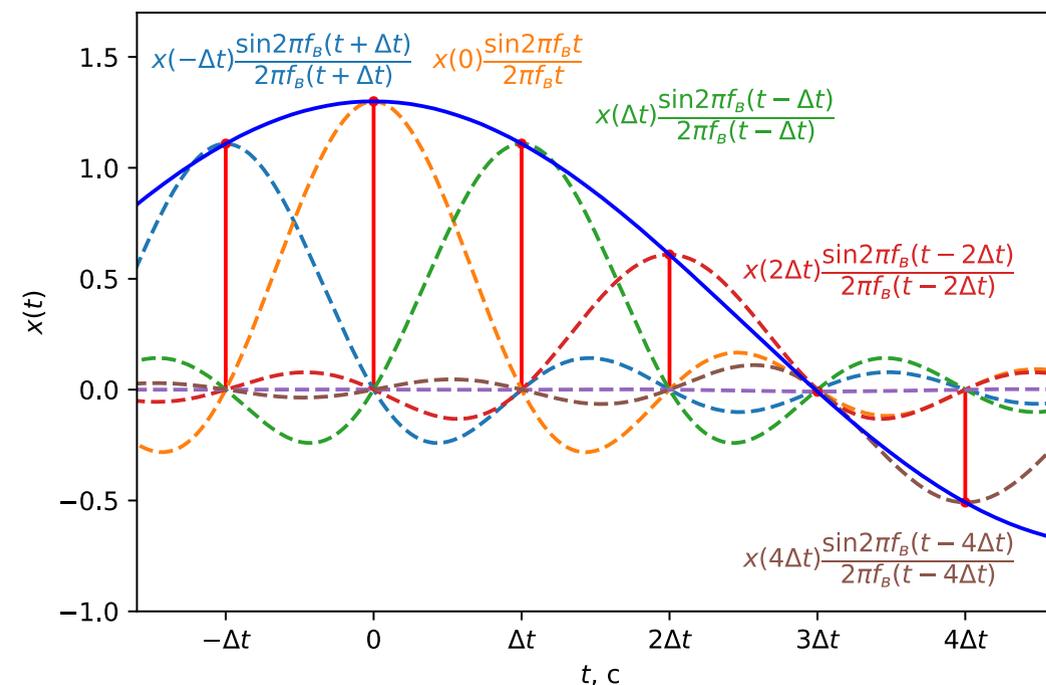
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}.$$

Интерпретация. Если сигнал  $x(t)$  дискретизован с частотой  $f_d$ , а его спектр ограничен интервалом  $[-f_d/2, f_d/2]$ , его можно представить с помощью дискретных отсчетов  $x(k\Delta t)$ .

<sup>1</sup> Без этой оговорки теорема Котельникова не выполняется, например, для случая дискретизации сигнала

$$x(t) = \sin(2\pi f_B t) \text{ с шагом } \Delta t = \frac{1}{2f_B}.$$

Частота  $f_d/2$ , равная половине частоты дискретизации, называется частотой Найквиста.



В пространстве сигналов из  $L_2(-\infty, \infty)$  с спектром, ограниченным интервалом  $[-f_d/2, f_d/2]$ , система функций отсчетов  $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , таких, что

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}, \Delta t = \frac{1}{2f_B},$$

полна и ортогональна.

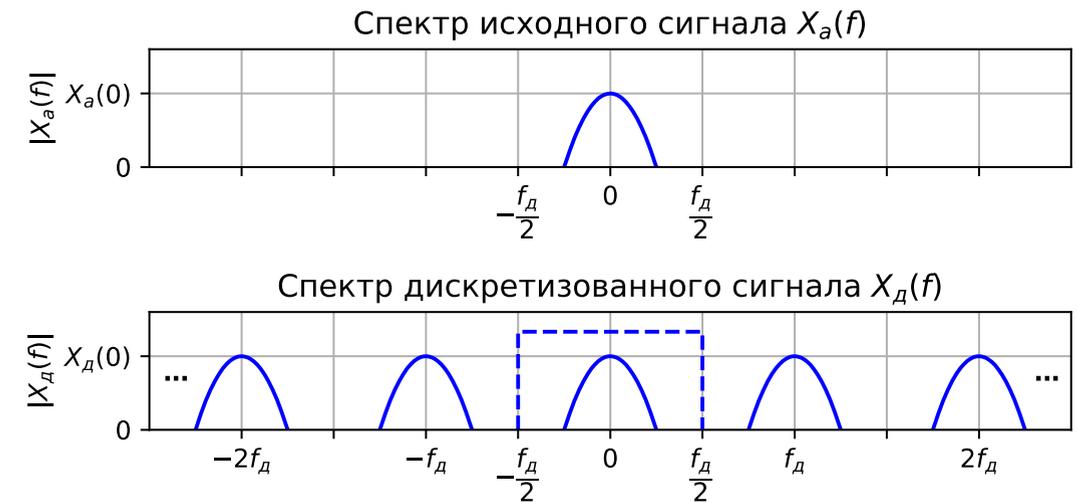
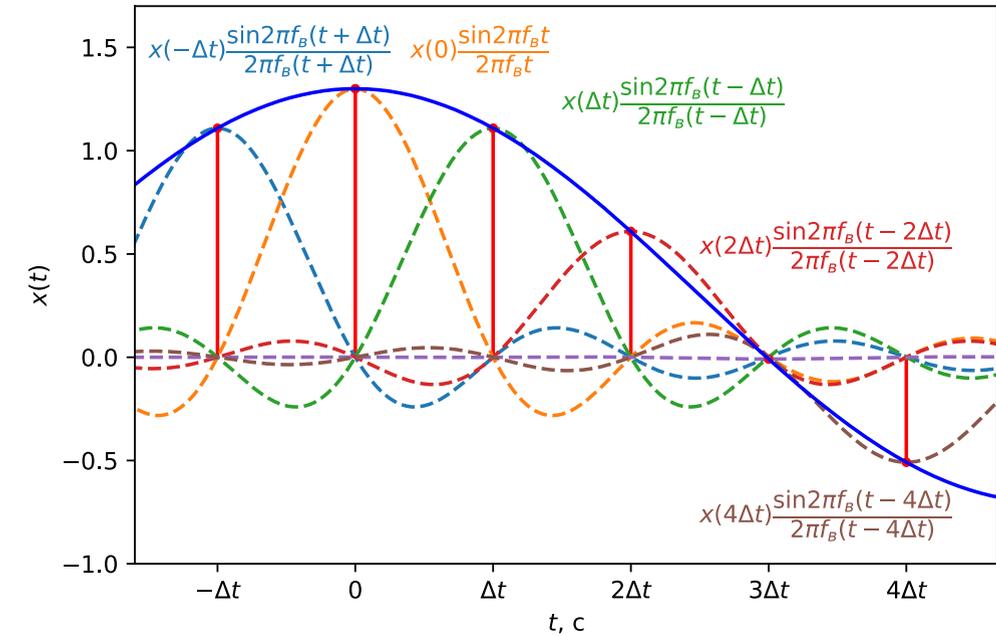
# Теорема Котельникова во временной области.

Алгоритм передачи непрерывного сигнала с помощью его отсчетов.

- Взять отсчеты  $x(k\Delta t)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Передать величины этих отсчетов.
- На приемном конце сформировать короткие импульсы с площадями  $\Delta t x(k\Delta t)$ .
- Восстановить сообщение с помощью фильтра нижних частот с полосой пропускания  $[-f_B, f_B]$ , подавая на вход сформированные короткие импульсы

Недостатки подхода.

- Спектры реальных сигналов ограничены по частоте приближено.
- Невозможно измерить отсчеты сигнала за бесконечно малый промежуток времени.
- Реальные фильтры восстановления отличаются от идеального фильтра нижних частот.
- Короткие импульсы отличны от дельта-функций.



# Особенности дискретизации синусоидальных сигналов.

## Особенности дискретизации синусоидальных сигналов.

Пусть сигнал  $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$  дискретизируется с частотой дискретизации  $f_d = 1/\Delta t$ .

Тогда

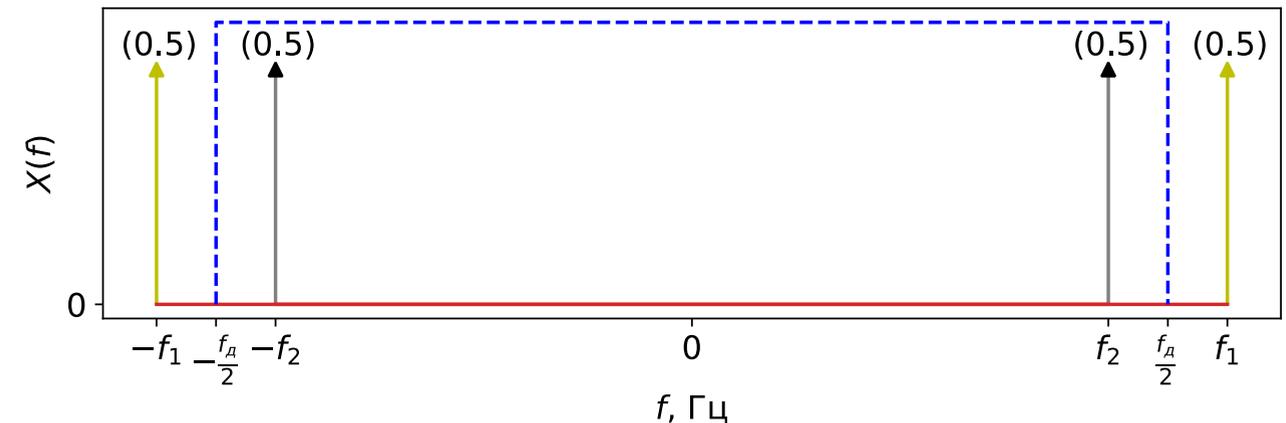
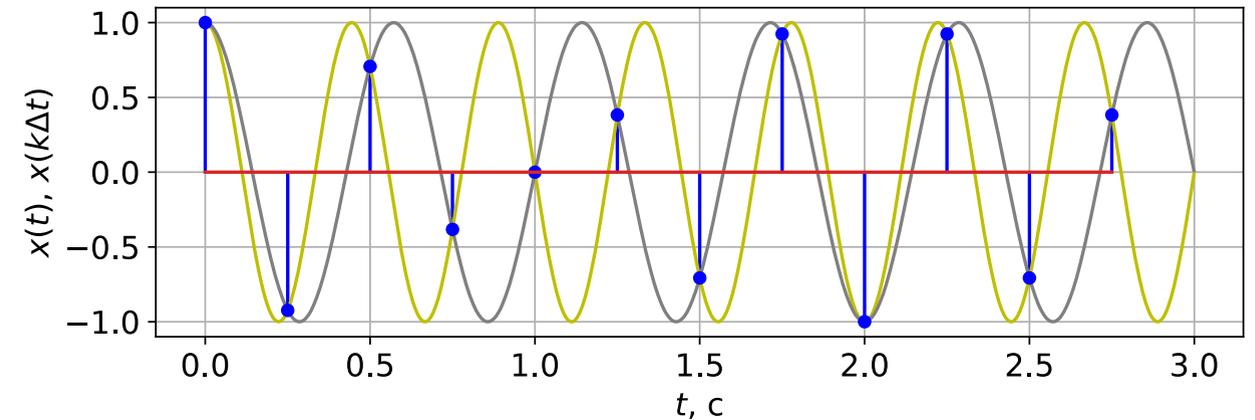
$$\begin{aligned} x[k] &= \sin(2\pi f_0 k \Delta t) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{n}{\Delta t}\right)k\Delta t\right) = \\ &= \sin(2\pi(f_0 + n f_d)k\Delta t). \end{aligned}$$

Следовательно, гармонические сигналы с частотами  $f_0$  и  $f_0 + n f_d$  дают одинаковый результат.

Последовательность цифровых отсчетов  $x[k]$ , представляющая синусоиду с частотой  $f_0$ , точно так же представляет синусоиды с другими частотами  $f_0 + n f_d$ .

Причина заключается в эффекте наложения спектров.

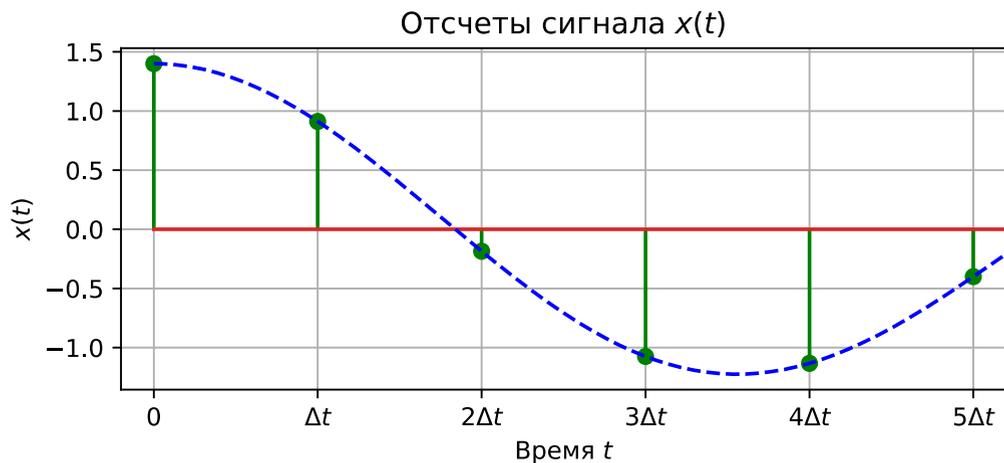
**Пример.** Дискретизованные косинусоиды с частотами  $f_1 = 2,25$  Гц и  $f_2 = 1,75$  Гц не различимы при частоте дискретизации  $f_d = 4$  Гц.



# 1.4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).

## 1.4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ)

### Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов



Пусть есть последовательность выборок  $x(k\Delta t)$ , некоторого аналогового сигнала  $x(t)$ , где  $\Delta t$  — шаг дискретизации — интервал времени между каждой парой соседних эквидистантных отсчетов,  $k \in Z$  — номер отсчета.

$f_d = 1 / \Delta t$  — частота дискретизации — величина, обратная шагу дискретизации (размерность [Гц]=[с<sup>-1</sup>]). Будем считать, что спектр исходного аналогового сигнала ограничен

интервалом  $[-f_d / 2; f_d / 2]$ , а соответственно при дискретизации не наблюдается эффект наложения спектров ( $f_d > 2f_B$ ).

Рассмотрим последовательность отсчетов (дискретный сигнал)  $x[k]$ , которую будем определять через выборки следующим образом

$$x[k] = Tx(k\Delta t),$$

где  $T = \Delta t$ . Как ранее было установлено, при  $T = \Delta t$  спектр дискретизованного сигнала  $x[k]$  представляет собой периодическое повторение исходного спектра  $X_a(f)$  аналогового сигнала  $x(t)$  с периодом, равным частоте дискретизации  $f_d$ :

$$X_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f - nf_d).$$

Необходимая спектральная информация будет содержаться в полосе  $[-f_d / 2; f_d / 2]$ . Теперь оценим спектр исходного сигнала по его выборкам в этой полосе.

## 1.4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).

Континуальная запись дискретного сигнала  $x[k]$  в данном случае

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t).$$

Вычислим его спектр (преобразование Фурье)

$$\begin{aligned} X_d(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \exp(-j2\pi f t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi f t) dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi f t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t), \end{aligned}$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала определяется через его отсчёты по формуле

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t). \quad (1)$$

Эта формула определяет прямое дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Учитывая, что (1) представляет собой ряд Фурье для периодической функции

$X_d(f)^2$ , получаем, что отсчётные значения дискретного сигнала соответствуют коэффициентам Фурье в этом ряде:

$$x[k] = c_{-k} = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df. \quad (2)$$

В итоге получаем пару формул (1) и (2), определяющих прямое и обратное дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). ДВПФ в свою очередь показывает, каким является спектр дискретного сигнала  $x[k]$ , который на отрезке оси частот  $[-f_d/2; f_d/2]$  в отсутствие наложения совпадает со спектром исходного аналогового сигнала. При этом важно помнить, что в данном случае выборки аналогового сигнала связаны с дискретной последовательностью как  $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$ .

<sup>2</sup> Напоминание. Для  $2l$ -периодической функции  $f(x)$ , абсолютно интегрируемой на интервале  $(-l; l)$  ряд Фурье по системе функций  $\phi_m(x) = \exp(jm \frac{\pi}{l} x)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ :

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(jm \frac{\pi}{l} x), \text{ где коэффициенты Фурье } c_m = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp(-jm \frac{\pi}{l} x) dx.$$

# Различные формы записи ДВПФ

## Различные формы записи ДВПФ

Итак, мы установили, что пара дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ) имеет вид

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t),$$
$$x[k] = \frac{1}{f_D} \int_{-f_D/2}^{f_D/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df.$$

Введем нормированные частоты  $\nu = f / f_D = f \Delta t$ . Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi \nu k),$$
$$x[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \exp(j2\pi \nu k) d\nu.$$

Если принять  $2\pi f = \omega$ , а частоту дискретизации взять в рад/с  $\omega_D = 2\pi / \Delta t$ , то

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\omega k \Delta t),$$
$$x[k] = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\omega_D/2}^{\omega_D/2} X(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega.$$

Приняв  $\theta = 2\pi \nu$  (нормированный угол в радианах), получаем

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\theta k),$$
$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) \exp(j\theta k) d\theta.$$

Частотная переменная	Размерность	Период повторения спектра	
$f$	Гц	$f_D = 1 / \Delta t$	$[-f_D / 2; f_D / 2]$
$\omega = 2\pi f$	рад/с	$\omega_D = 2\pi / \Delta t$	$[-\omega_D / 2; \omega_D / 2]$
$\nu = f / f_D$	безразмерная	1	$[-0,5; 0,5]$
$\theta = 2\pi f / f_D$	рад	$2\pi$	$[-\pi; \pi]$

# Различные формы записи ДВПФ

**Пример.** Рассмотрим в качестве примера последовательность единичных импульсов

$$x[k] = \mathbf{1}[k+1] + \mathbf{1}[k] + \mathbf{1}[k-1],$$

где  $\mathbf{1}[k]$  — единичный импульс, определяемый как

$$\mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

ДВПФ  $x[k]$  в нормированных частотах  $\nu$

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=-1}^1 x[k]e^{-j2\pi\nu k} = \\ &= x[-1]e^{j2\pi\nu} + x[0]e^0 + x[1]e^{-j2\pi\nu} = \\ &= \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu). \end{aligned}$$

Аналогично для частот в герцах ( $f$ )

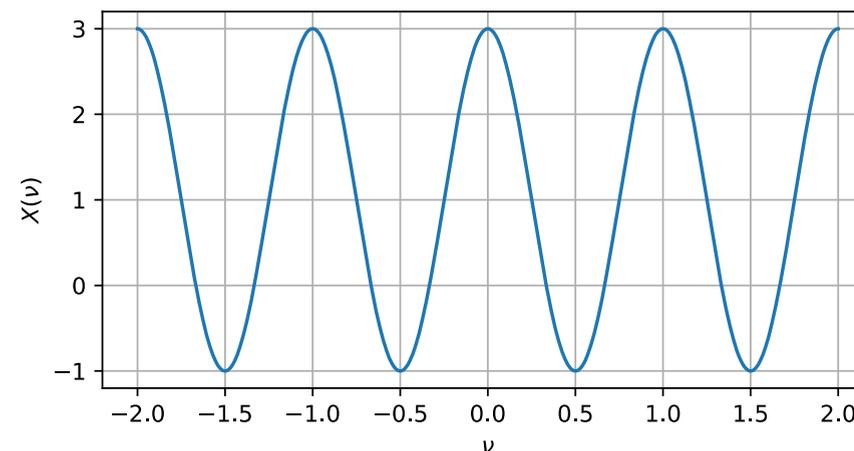
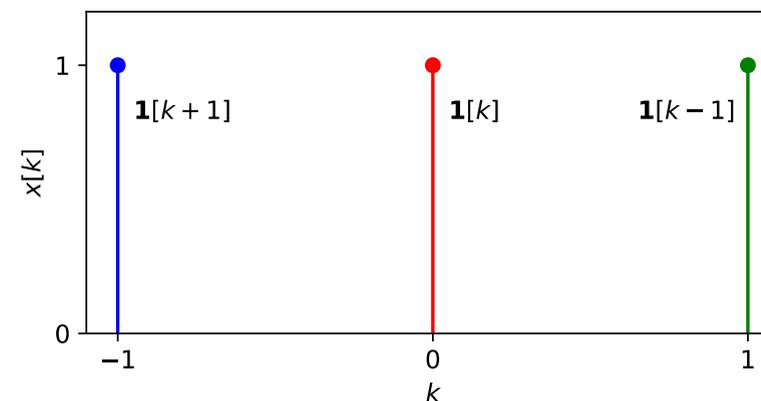
$$X(f) = 1 + 2\cos(2\pi f \Delta t),$$

для частот в рад/с ( $\omega = 2\pi f$ )

$$X(\omega) = 1 + 2\cos(\omega \Delta t),$$

для  $\theta = 2\pi\nu$

$$X(\theta) = 1 + 2\cos(\theta).$$



Функция  $X(\nu)$  периодическая и в силу четной симметрии  $x[k]$  относительно нуля действительная.

# Различные формы записи ДВПФ

## Свойства ДВПФ

### 1) Линейность

Если  $x[k] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$  и  $y[k] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} Y(\nu)$ , то

$\alpha x[k] + \beta y[k] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \alpha X(\nu) + \beta Y(\nu)$ , где  $\alpha, \beta$  — фиксированные числа.

Это свойство следует непосредственно из соответствующих свойств интеграла и суммы.

### 2) Теорема запаздывания

Если

$$x[k] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu), \text{ то } x[k-l] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu) \exp(-j2\pi\nu l).$$

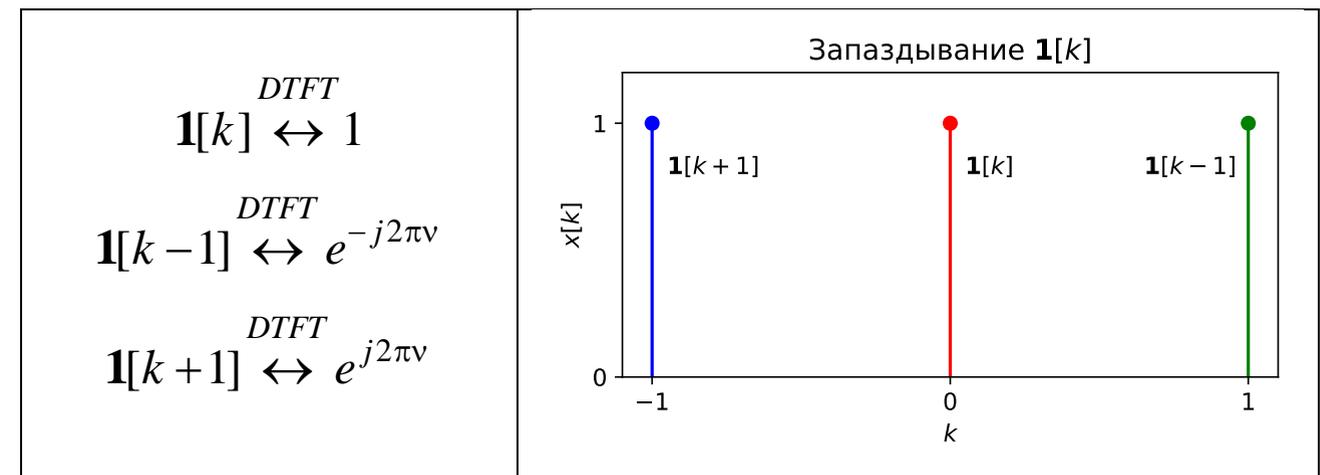
где  $x[k-l]$  — это сигнал, запаздывающий по времени относительно сигнала  $x[k]$  на  $l$  отсчетов в случае  $l > 0$  и опережающий сигнал  $x[k]$  на  $-l$  отсчетов в случае  $l < 0$ .

Стоит отметить, что  $|X(\nu)|$  для запаздывающего и исходного сигнала одинаков.

Докажем свойство. Для этого возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \exp(-j2\pi\nu l) \exp(j2\pi\nu k) d\nu = \\ = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \exp(j2\pi\nu(k-l)) d\nu = x[k-l].$$

### Пример



# Различные формы записи ДВПФ

## 3) Теорема сдвига

Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)$ , то  $x[k] \exp(j2\pi\nu_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu - \nu_0)$ .

Умножение сигнала на комплексную экспоненту вида  $\exp(j2\pi\nu_0 k)$ ,  $\nu_0 \in \mathbb{R}$  приводит к сдвигу спектральной функции вдоль оси частот на  $\nu_0$  вправо в случае  $\nu_0 > 0$  и на  $-\nu_0$  влево в случае  $\nu_0 < 0$ .

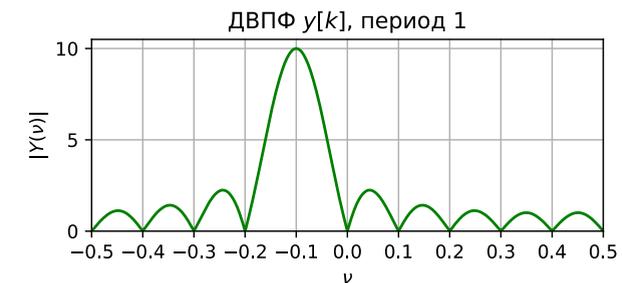
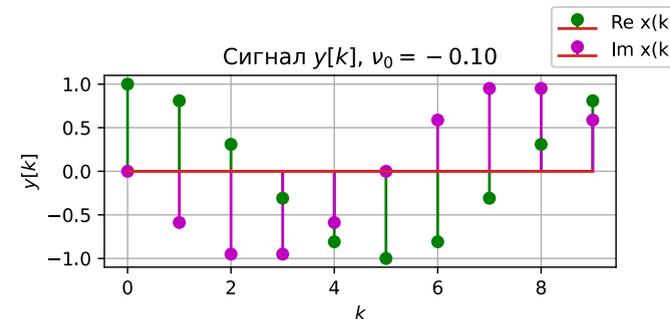
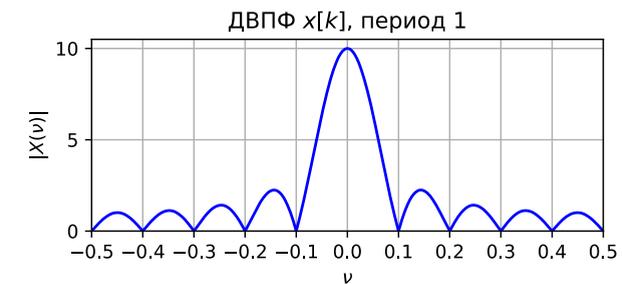
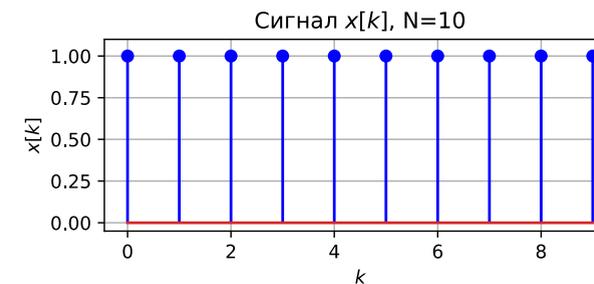
### Пример.

$y[k] = x[k] \exp(j2\pi\nu_0 k)$ , где  $x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k - m]$ .

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \frac{1 - \exp(-j2\pi\nu N)}{1 - \exp(-j2\pi\nu)} = \\ &= \frac{2j e^{-j\pi\nu N} (e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N})}{2j e^{-j\pi\nu} (e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu})} = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu). \end{aligned}$$

$$|X(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|.$$

$$Y(\nu) = X(\nu - \nu_0) = \frac{\sin(N\pi(\nu - \nu_0))}{\sin(\pi(\nu - \nu_0))} \exp(-j(N-1)\pi(\nu - \nu_0))$$



# Различные формы записи ДВПФ

## 4) Равенство Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)Y^*(\nu)d\nu$$

### Пример.

Предположим, что имеется конечная последовательность

$x[k] = \{1; 1; 1\}$ . Тогда  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = 3$ . При этом

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j2\pi\nu k} = x[-1]e^{j2\pi\nu} + x[0]e^0 + x[1]e^{-j2\pi\nu} = \\ = \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu).$$

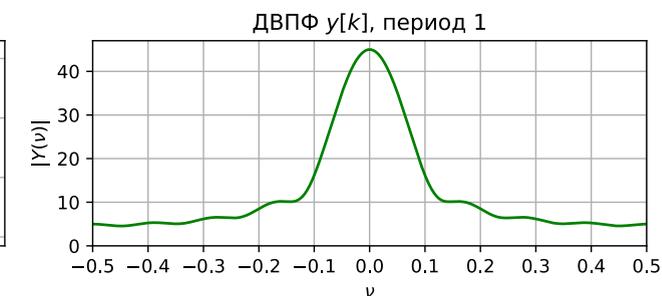
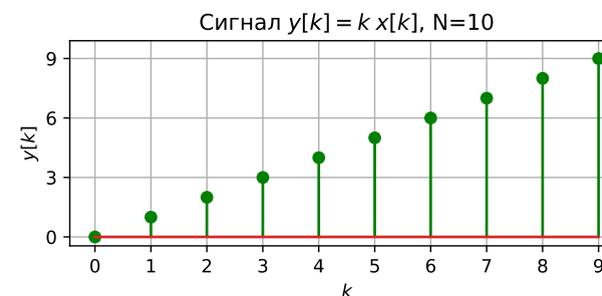
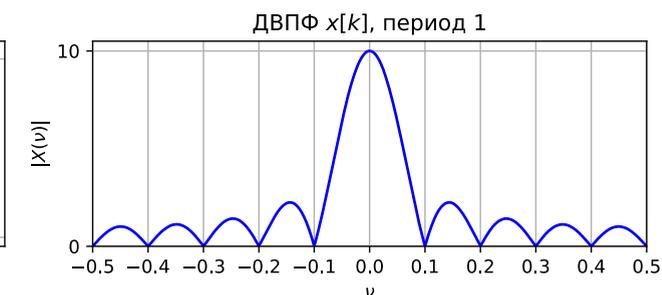
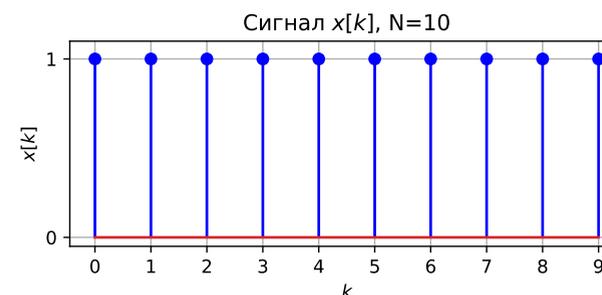
$$\int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} |1 + 2\cos(2\pi\nu)|^2 d\nu = 3.$$

## 5) Умножение на $k$ и дифференцирование по частоте

$$\text{Если } x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu), \text{ то } y[k] = kx[k] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{j}{2\pi} \frac{dX(\nu)}{d\nu}.$$

### Пример.

$$x[k] = \sum_{m=0}^9 \mathbf{1}[k-m].$$



# Различные формы записи ДВПФ

## б) Изменение масштаба

Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)$ , то  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathbf{1}[k-mL] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu L)$ .

Для того, чтобы доказать свойство, вычислим ДВПФ для последовательности в левой части.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathbf{1}[k-mL] \exp(-j2\pi\nu k) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL] \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \exp(-j2\pi(\nu L)m) = X(\nu L). \end{aligned}$$

### Пример

Рассмотрим последовательность из 10 единичных

импульсов.  $x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m]$ .

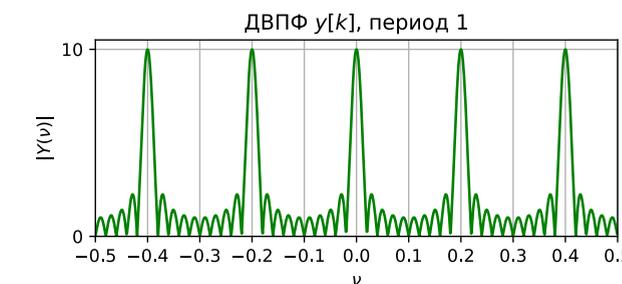
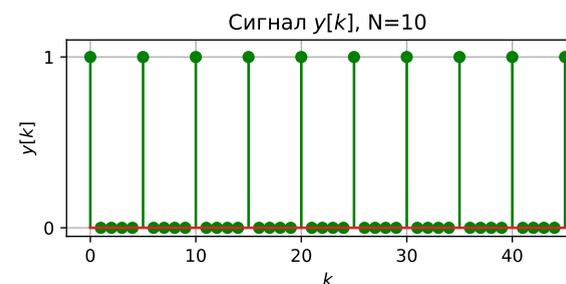
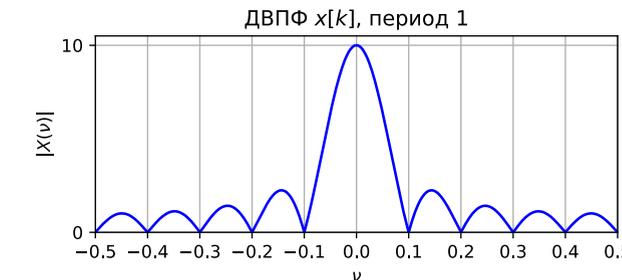
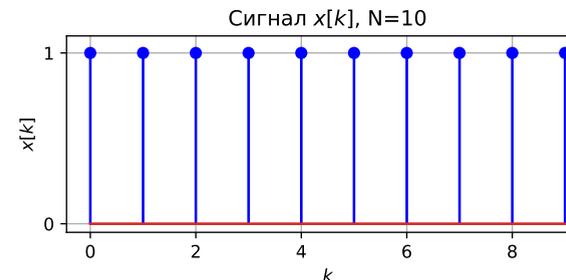
$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \frac{1 - \exp(-j2\pi\nu N)}{1 - \exp(-j2\pi\nu)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-j\pi\nu N} (e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N})}{e^{-j\pi\nu} (e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu})} = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu).$$

$$|X(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|.$$

Между каждой парой отсчетов добавим  $L-1$  нулевой отсчет. Тогда модуль ДВПФ получившейся последовательности

$$|X_L(\nu)| = \left| \frac{\sin(10\pi\nu L)}{\sin(\pi\nu L)} \right|.$$

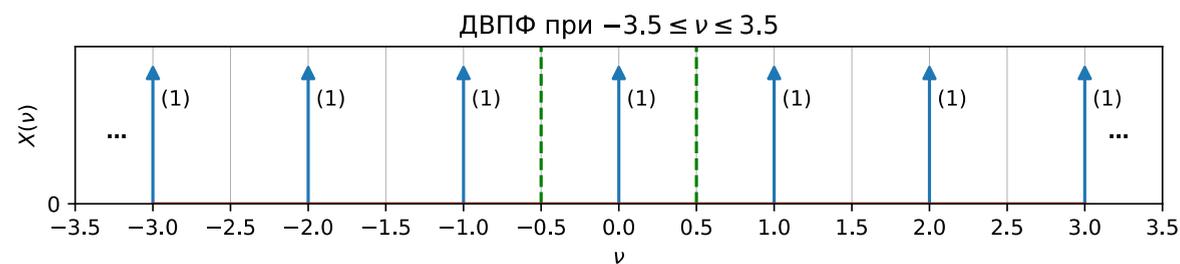
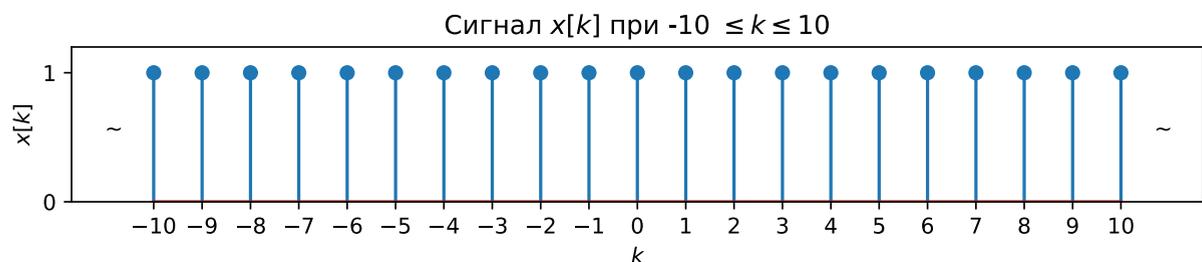


# Различные формы записи ДВПФ

## 7) ДВПФ периодических последовательностей

### а) последовательность единичных импульсов с периодом 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n)$$



Вычислим ДВПФ для последовательности  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]$ .

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi v k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \right) \exp(-j2\pi v k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \exp(-j2\pi v k).$$

$$X(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi v m).$$

Заметим, что  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi v m)$  — это ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности  $\delta$ -функций с периодом 1

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m} \exp(-j2\pi v m),$$

где коэффициенты Фурье

$$C_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(v) \exp(j2\pi v m) dv = e^0 = 1.$$

Тогда получаем, что

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n).$$

# Различные формы записи ДВПФ

б) Периодическая последовательность единичных импульсов с периодом  $L$ .

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right)$$

Найдем ДВПФ для последовательности  $x[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL]$ .

Используя свойство об изменении масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu L),$$

из

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - m] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$$

получаем

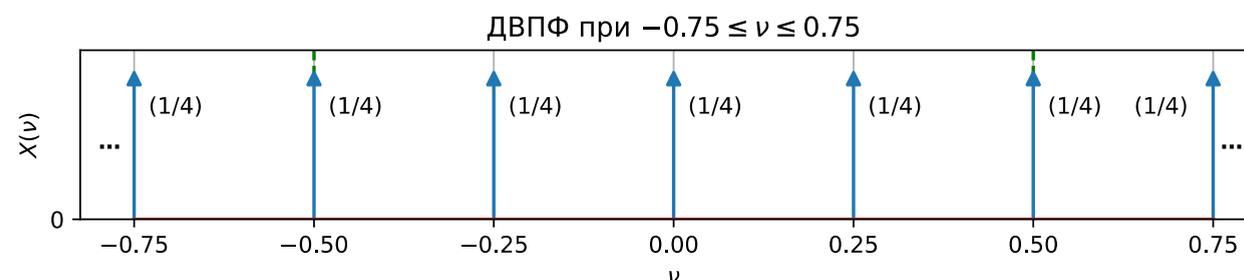
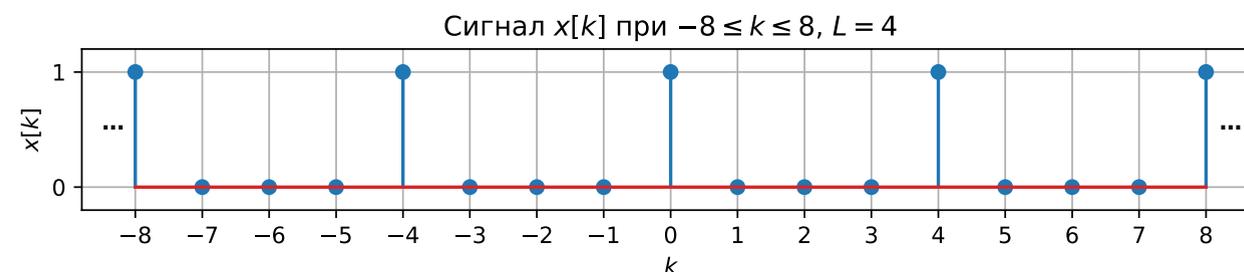
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu L - n)$$

Воспользовавшись свойством  $\delta$ -функции

$$\delta(av - b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(\nu - \frac{b}{a}\right),$$

получаем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right)$$

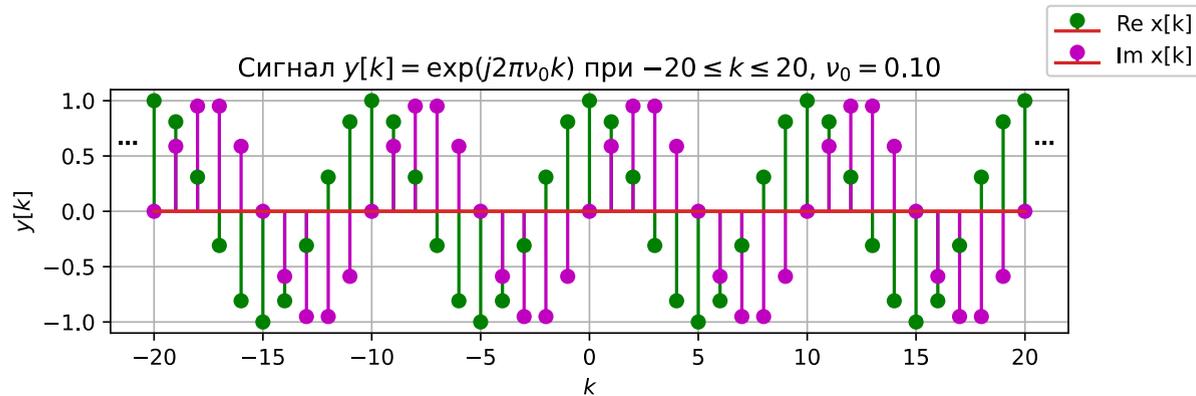


# Различные формы записи ДВПФ

## в) Гармонические сигналы

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), -\infty < k < +\infty \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

$$y[k] = \exp(j2\pi\nu_0 k)$$



$$\text{Если } x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu), \text{ то } x[k]\exp(j2\pi\nu_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu - \nu_0).$$

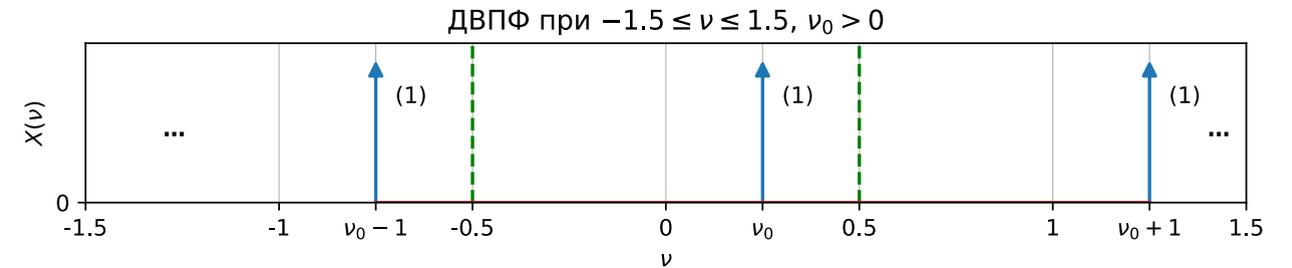
(теорема смещения для ДВПФ). При этом

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n).$$

Получаем, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]\exp(j2\pi\nu_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), -\infty < k < +\infty \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$



## 8) Теорема о свертке во временной области.

$$\begin{aligned} &\text{Если } x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu) \text{ и } y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(\nu), \\ &\text{то } \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[k-m] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)Y(\nu). \end{aligned}$$

В левой части стоит дискретная свертка сигналов, в правой — произведение спектров.

## 9) Теорема о свертке в частотной области

$$\begin{aligned} &\text{Если } x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu) \text{ и } y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(\nu), \\ &\text{то } x[k]y[k] \xleftrightarrow{DTFT} \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{\nu})Y(\nu - \tilde{\nu})d\tilde{\nu}. \end{aligned}$$

В левой части стоит произведение сигналов, в правой -- циклическая свертка спектров.

## Задачи для самостоятельного решения

с лекции 9 сентября 2024 г.

**№1.** Найти ДВПФ 16 - точечных последовательностей

а)  $x[k] = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}[k - m],$

б)  $y_1[k] = x[k] \cos(2\pi k 5 / 16),$

в)  $y_2[k] = x[k] \sin(2\pi k 5 / 16).$

Для п. а) изобразить график модуля ДВПФ.

**№2.**

а) Определить для  $N = 16$  ДВПФ окна Блэкмана

$$w_B[k] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos\left(2\pi \frac{1}{N} k\right) + 0,08 \cos\left(2\pi \frac{2}{N} k\right), \\ \text{при } k = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \\ 0, \text{ при других } k. \end{cases}$$

б) Найти ДВПФ 16 - точечной последовательности

$y[k] = w_B[k] \cos(2\pi k 5 / 16),$  где  $w_B[k]$  — окно Блэкмана длиной в 16 отсчетов.

**№3.** Гармонический сигнал  $x(t) = \cos 2\pi f_0 t, f_0 = 17$  Гц, дискретизован с частотой  $f_d = 170$  Гц. Найти ДВПФ  $X(\nu)$  (в нормированных частотах) последовательности отчетов этого сигнала  $x[k] = x(k\Delta t)$ . Построить график  $X(\nu)$  для значений нормированных частот  $\nu \in [-2,5; 2,5]$ .

**№4.** Определить, будут ли различимы синусоиды с частотами  $f_1 = 20$  кГц и  $f_2 = 80$  кГц при их дискретизации с частотой  $f_d = 60$  кГц. Будет ли наблюдаться эффект наложения при дискретизации каждого из этих сигналов?

## Теорема отсчетов в частотной области

Реально все сигналы наблюдаются в течение конечного интервала времени, например,  $[-T, T]$ . Поэтому можно считать, что  $x(t)$  является финитной функцией. Спектр такого сигнала имеет бесконечную протяжённость и записывается в виде

$$X(f) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Для периодического продолжения  $x(t)$  с периодом  $2T$  (без наложения) справедливо представление рядом Фурье:

$$x_{\Pi}(t) = \sum_n c_n \exp(j2\pi n \Delta f t),$$

где  $\Delta f = 1/2T$  и коэффициенты Фурье

$$c_n = (1/2T) \int_{-T}^T x(t) \exp(-j2\pi n \Delta f t) dt = \Delta f X(n\Delta f).$$

Для спектральной функции можем записать

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-T}^T \left[ \sum_n \Delta f X(n\Delta f) \exp(j2\pi n \Delta f t) \right] \exp(-j2\pi f t) dt = \\ &= \Delta f \sum_n X(n\Delta f) \int_{-T}^T \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) dt &= \frac{1}{j2\pi(n\Delta f - f)} \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) \Big|_{-T}^T = \\ &= \frac{2 \sin 2\pi T(n\Delta f - f)}{2\pi(n\Delta f - f)}. \end{aligned}$$

Для  $X(f)$  окончательно получаем

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta f) \frac{\sin 2\pi T(f - n\Delta f)}{2\pi T(f - n\Delta f)}; \quad \Delta f = 1/2T.$$

Это интерполяционная формула Котельникова (теорема отсчётов) в частотной области. Функция  $X(f)$  на любой частоте  $f$  однозначно представляется последовательностью своих отсчётов, взятых через равные интервалы  $\Delta f = 1/2T$ .

Дискретизация спектральной функции с шагом  $\Delta f = 1/2T$  приводит к периодическому повторению сигнала по оси времени с периодом  $2T$ . При этом эффекта наложения отдельных периодов друг на друга не будет, поскольку шаг дискретизации по частоте выбран в соответствии с теоремой отсчётов в спектральной области.