

Лекция 8 по курсу «Основы цифровой обработки сигналов»

21 октября 2024 г.

4.3. z-преобразование в дискретных системах.

Переход от преобразования Лапласа к z-преобразованию.

Свойства z-преобразования.

z-преобразование тестовых сигналов.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

Методы вычисления обратного z-преобразования:

разложение на простые дроби,

контурное интегрирование (на основе теоремы Коши о вычетах),

разложение в степенной ряд,

деление числителя z-формы на ее знаменатель,

использование таблицы соответствий.

$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z)z^{k-1}dz$$

Приложение. Преобразование Лапласа.

Переход от преобразования Лапласа к z-преобразованию

4.3. z-преобразование в дискретных системах.

Переход от преобразования Лапласа к z-преобразованию.

Преобразование Лапласа можно рассматривать как обобщение преобразования Фурье на случай комплексных частот $p = \beta + j\omega$, где β – положительная константа, выбираемая так, чтобы сигнал $x(t)e^{-\beta t}$ был абсолютно интегрируемым при $t \geq 0$:

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad (1)$$

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} X(p) e^{pt} dp. \quad (2)$$

Это есть пара преобразования Лапласа. Обратное преобразование (2) совершается путем интегрирования в комплексной плоскости p вдоль вертикальной прямой $\beta = \text{const}$. Преобразование Фурье является частным случаем преобразования Лапласа, в котором достаточно p заменить на $j\omega$, т. е. положить $\beta = 0$.

Пусть теперь $x(t)$ дискретизируется с шагом Δt . Подставим в (1) вместо $x(t)$ модель дискретизованного сигнала

$$x[k] = \Delta t x(k\Delta t),$$

$$x_d(t) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t),$$

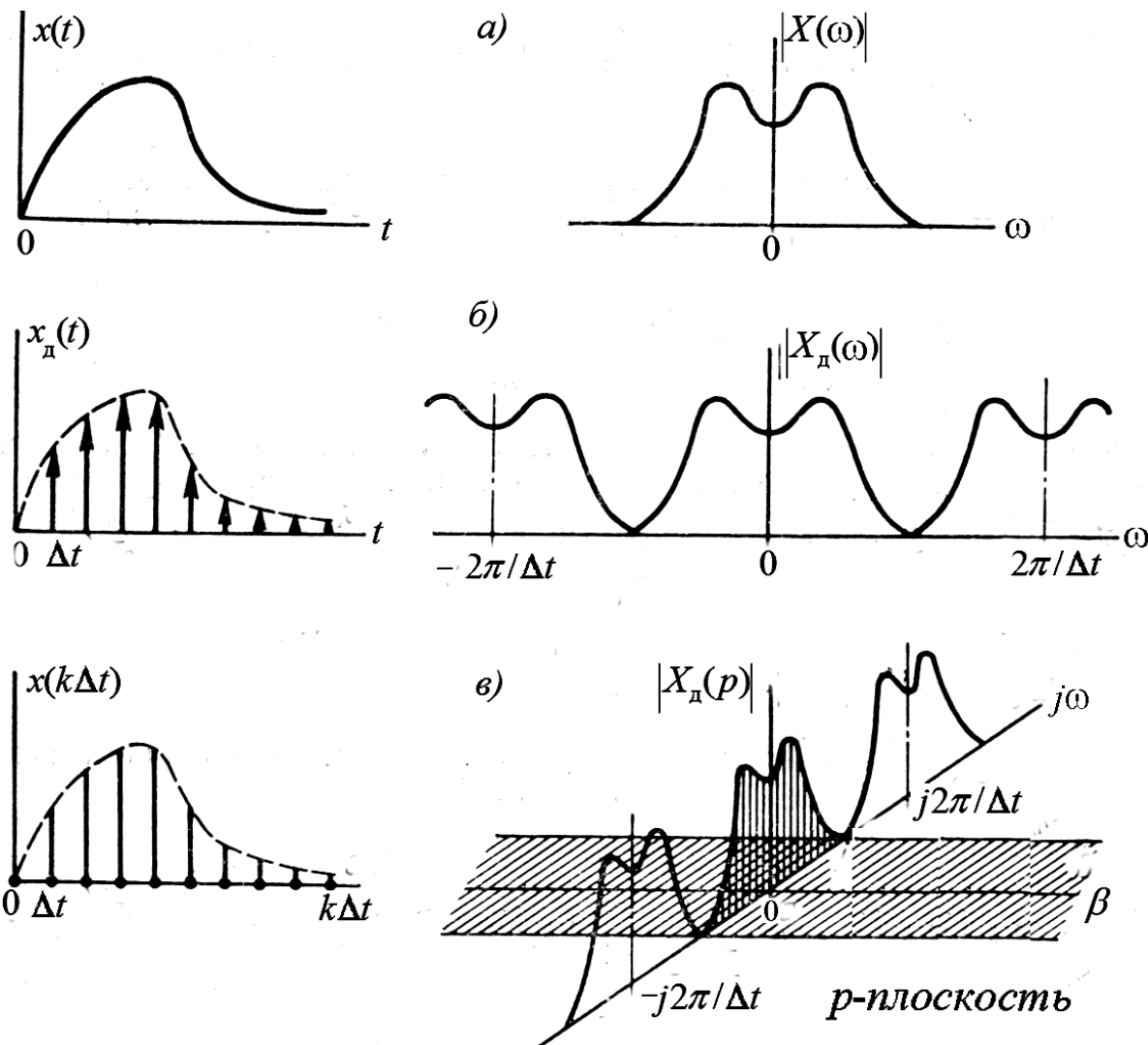
а в (2) перейдем от t к $k\Delta t$. Учитывая, что вдоль линии, параллельной оси $j\omega$, изображение $X_d(p)$ является периодической функцией с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_d = 2\pi / \Delta t$, получаем

$$X_d(p) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-pk\Delta t}, \quad (3)$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\beta-j\pi/\Delta t}^{\beta+j\pi/\Delta t} X_d(p) e^{pk\Delta t} dp. \quad (4)$$

Представление (3) и (4) широко используется при анализе дискретных сигналов. Часто его применяют в модифицированном виде, носящем название z-преобразования. Для этого перейдем к новой переменной $z = \exp(p\Delta t)$.

Переход от преобразования Лапласа к z-преобразованию



$$z = \exp(p\Delta t).$$

Учитывая, что $dz = \Delta t \exp(p\Delta t) dp$ и $dp = dz / z\Delta t$, получаем

$$X(z) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta t) z^{-k},$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{j2\pi\Delta t} \oint_C X(z) z^{k-1} dz,$$

и с учетом того, что $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$,

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}, \quad (5)$$

$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{k-1} dz, \quad (6)$$

где C – замкнутый контур в плоскости z , охватывающий все полюса подынтегральной функции $X(z)z^{k-1}$. Выражения (5) и (6) определяют одностороннее прямое и обратное z -преобразование соответственно.

Здесь $x[k]$ – дискретный сигнал, определенный на бесконечном интервале $[0, \infty)$, а $X(z)$ является комплексной функцией непрерывного комплексного аргумента z .

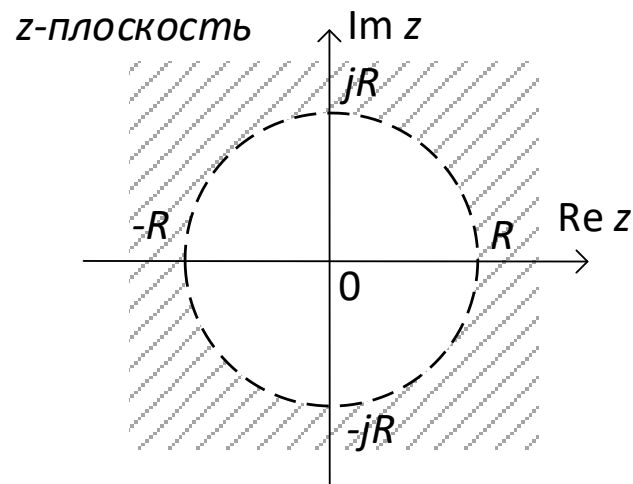
Переход от преобразования Лапласа к z -преобразованию

Из теории функций комплексного переменного известно, что ряд (5) будет сходиться, если коэффициенты ряда удовлетворяют условию

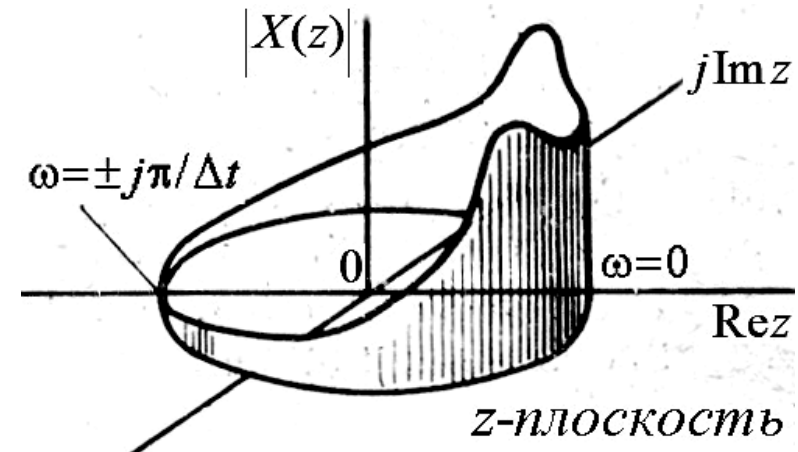
$$|x[k]| < M \cdot R^k,$$

где $M > 0$ и $R > 0$ – постоянные вещественные числа.

Ряд (5) будет сходиться при всех z , таких, что $|z| > R$. В этой области $X(z)$ представляет собой аналитическую функцию z , не имеющую ни полюсов, ни существенно особых точек. Область сходимости $|z| > R \geq 0$.



Функция $X_d(p)$ отображается в функцию $X(z)$ так, что одному периоду $X_d(p)$ соответствует один оборот по окружности в плоскости z .



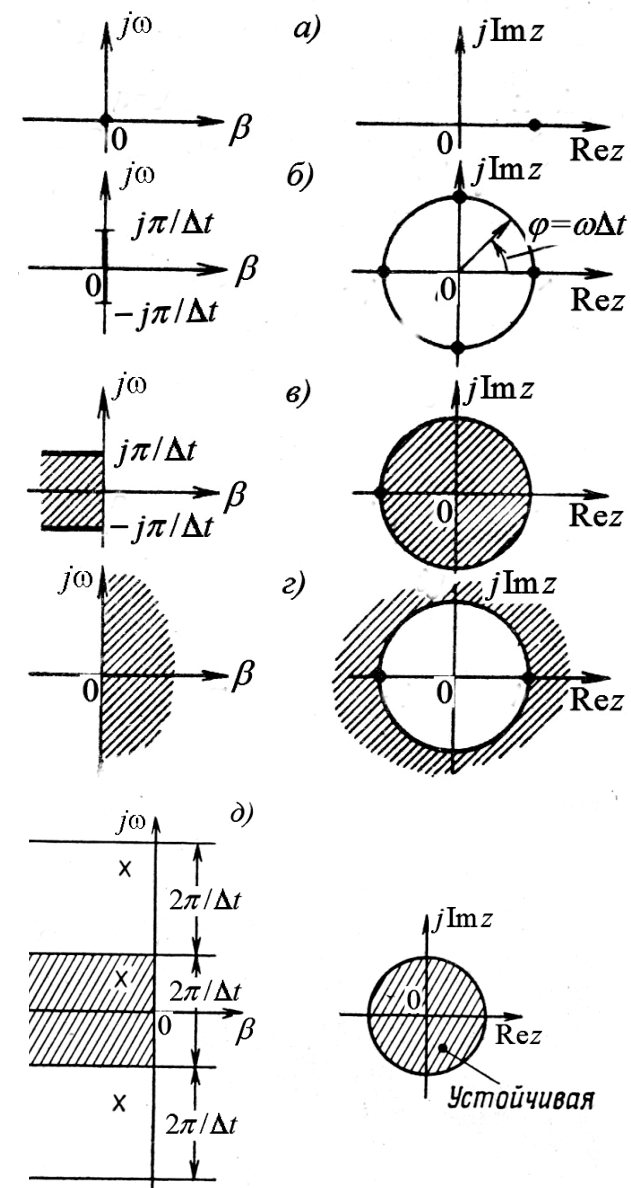
Отметим еще, что $e^{-p\Delta t}$ соответствует задержке на один такт дискретизации в p -плоскости в то время как z^{-1} означает такую же задержку в z -плоскости.

Переход от преобразования Лапласа к z-преобразованию

Поскольку $z = e^{p\Delta t} = e^{(\beta + j\omega)\Delta t}$, то $|z| = e^{\beta\Delta t}$ и $\arg z = \omega\Delta t$.

Переход от переменной p к переменной z соответствует отображению плоскости p на плоскость z , в результате которого линии, параллельные оси $j\omega$, отображаются в концентрические окружности с центром в начале координат. Сама ось $j\omega$ отображается в единичную окружность, причем, когда ω меняется от $-\pi/\Delta t$ до $\pi/\Delta t$, отображающая точка совершает один оборот на единичной окружности (рис. б). Полоса шириной $\omega_d = 2\pi/\Delta t$ левой полуплоскости p отображается внутрь круга единичного радиуса в плоскости z (рис. в). Правая полуплоскость p преобразуется во всю z -плоскость, исключая единичный круг (рис. г).

Все полюсы функции $X(p)$, которые расположены в плоскости p на одной вертикали с интервалом $\omega_d = 2\pi/\Delta t$, отображаются в единственный полюс $X(z)$ в плоскости z (рис. д).



Отображение p -плоскости в z -плоскость
 $z = \exp(p\Delta t)$.

Свойства z-преобразования

Пару z-преобразования будем обозначать $x[k] \xleftrightarrow{z} X(z)$, где по-прежнему $x[k]$ – каузальный сигнал, т. е. $x[k] = 0$ при $k < 0$.

Линейность. Если $x_1[k] \xleftrightarrow{z} X_1(z)$ и $x_2[k] \xleftrightarrow{z} X_2(z)$,

то

$$ax_1[k] + bx_2[k] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z). \quad (7)$$

Теорема запаздывания. Если $x[k] \xleftrightarrow{z} X(z)$, то

$$x[k-m] \xleftrightarrow{z} z^{-m} X(z). \quad (8)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x[k-m] z^{-k} &= z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} x[k-m] z^{-(k-m)} = \\ &= z^{-m} \sum_{l=0}^{\infty} x[l] z^{-l} = z^{-m} X(z). \end{aligned}$$

В последнем равенстве проведена замена $l = k - m$ и использовано свойство каузальности сигнала $x[l]$, т. е. $x[l] = 0$ при $l = k - m < 0$.

Теорема о свертке. Если $x[k] \xleftrightarrow{z} X(z)$ и $h[k] \xleftrightarrow{z} H(z)$, то последовательность

$$y[k] = \sum_{m=0}^k x[m] h[k-m] \quad (9)$$

имеет z-образ

$$Y(z) = X(z)H(z), \quad (10)$$

т. е. z-образ линейной свертки двух последовательностей равно произведению их z-образов.

Доказательство

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k x[m] h[k-m] z^{-k}.$$

Сделаем замену $k - m = l$. В результате получим

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x[m] z^{-m} \sum_{l=0}^{\infty} h[l] z^{-l} = X(z)H(z),$$

что и требовалось доказать.

Свойства z-преобразования

Умножение сигнала на k .

Если $x[k] \xleftrightarrow{z} X(z)$, то

$$kx[k] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}.$$

Доказательство

Продифференцируем по z обе части формулы

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}.$$

Получаем

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} (-k) x[k] z^{-k-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на $-z$:

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} k x[k] z^{-k}.$$

Отсюда

$$kx[k] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}. \quad (11)$$

Умножение на экспоненту.

Умножим последовательность $x[k]$ на экспоненту $e^{\pm ak\Delta t}$ (a в общем случае комплексное).

z -преобразование такой последовательности

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{\pm ak\Delta t} x[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] (e^{\mp a\Delta t} z)^{-k} = X(ze^{\mp a\Delta t}).$$

Таким образом,

$$x[k] e^{\pm ak\Delta t} \xleftrightarrow{z} X(ze^{\mp a\Delta t}). \quad (12)$$

Это теорема сдвига для z -преобразования.

Теорема опережающего сдвига.

Для каузального сигнала $x[k]$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots$$

Для упреждающего сигнала $x[k+1]$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x[k+1] z^{-k} = x[1] + x[2]z^{-1} + x[3]z^{-2} + \dots = z[X(z) - x[0]].$$

Таким образом,

$$x[k+1] \xleftrightarrow{z} z[X(z) - x[0]]. \quad (13)$$

z-преобразование тестовых сигналов

$x[k]$ – единичный импульс, т. е.

$$x[k] = \mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad (14)$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} = 1 \text{ на всей } z\text{-плоскости.}$$

$u[k]$ – единичный скачок

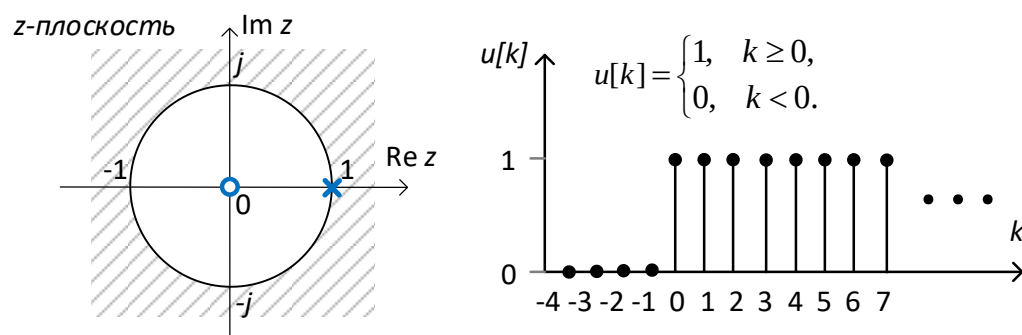
$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases} \quad U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}.$$

Очевидно, что $u[k] - u[k-1] = \mathbf{1}[k]$. z-образ этого уравнения

$$U(z) - U(z)z^{-1} = 1.$$

Отсюда

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \quad (15)$$

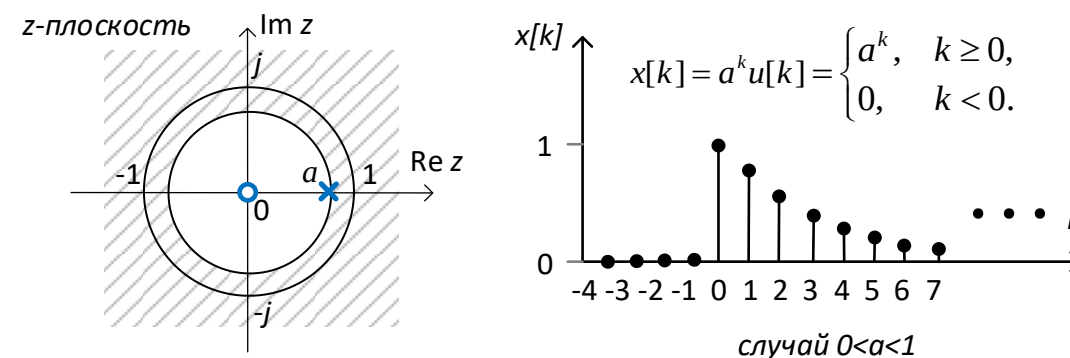


Функция $U(z)$ имеет нуль при $z = 0$ и полюс в точке $z = 1$. Сходится при $|z| > 1$.

$x[k]$ – действительная экспонента, т. е. $x[k] = a^k u[k]$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k.$$

Это сумма бесконечной геометрической прогрессии (знаменатель прогрессии $q = az^{-1}$).



Ряд сходится к

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad (16)$$

если $|az^{-1}| < 1$ или $|z| > |a|$. Функция $X(z)$ имеет нуль при $z = 0$ и полюс при $z = a$ на окружности, ограничивающей область сходимости.

$$x[k] = k a^k u[k]$$

Ранее мы установили, что

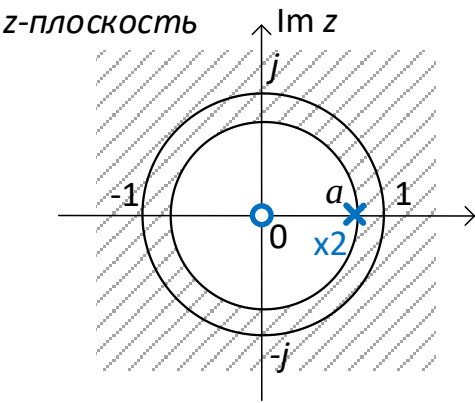
$$a^k u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}},$$

По свойствам z-преобразования если $x[k] \xleftrightarrow{z} X(z)$, то

$$kx[k] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}.$$

В итоге

$$X(z) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} = \frac{az}{(z - a)^2}.$$



Функция $X(z)$ имеет двойной полюс при $z = a$.

z-преобразования тестовых последовательностей		
	тестовая последовательность	z-образ
1	$1[k] = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$	$X(z) = 1$
2	$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases}$	$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1},$ сходится при $ z > 1$
3	$x[k] = a^k u[k]$	$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a},$ сходится при $ z > a .$
4	$x[k] = k a^k u[k]$	$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} = \frac{az}{(z - a)^2},$ сходится при $ z > a .$

Вычисление обратного z-преобразования

Вычисление обратного z-преобразования

Ранее мы установили, что пара z-преобразования записывается в виде

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k},$$
$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z)z^{k-1}dz.$$

Выражение для $x[k]$ позволяет найти каузальную последовательность по ее z-изображению $X(z)$.

В качестве контура интегрирования C можно взять любой замкнутый контур в z-плоскости, охватывающий все полюсы подинтегральной функции $X(z)z^{k-1}$ и начало координат.

Обратное z-преобразование существует только для таких функций которые могут иметь лишь конечное число изолированных полюсов, причем особенность в каждой из них является устранимой.

Основными задачами, решаемыми с помощью обратного z-преобразования, являются:

- определение по z-изображению последовательности $x[k]$, например, отклика фильтра;
- нахождение импульсной характеристики $h[k]$ по заданной передаточной функции фильтра $H(z)$.

Существуют различные способы вычисления обратного z-преобразования на основе

- теоремы Коши о вычетах;
- разложения z-изображения на простые дроби;
- деления числителя z-изображения на ее знаменатель;
- разложения z-изображения в ряд по степеням z^{-1} ;
- таблицы соответствий.

Вычисление обратного z-преобразования

Метод разложения на простые дроби

Эффективный способ вычисления обратного z-преобразования аналогичен способу разложения на простейшие дроби в теореме Хевисайда.

Форму разложения $X(z)$ на простейшие дроби выбираем так, чтобы были слагаемые вида $1/(1-az^{-1})$, которые можно поставить в соответствие тестовой последовательности $a^k u[k]$.

Пример 1. Найдем обратное z-преобразование функции

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0,25z^{-1} - 0,375z^{-2}}$$

Решение.

Представим $X(z)$ суммой элементарных дробей :

$$X(z) = \frac{1}{(1 + 0,5z^{-1})(1 - 0,75z^{-1})} = \frac{A}{(1 + 0,5z^{-1})} + \frac{B}{(1 - 0,75z^{-1})}.$$

Коэффициенты каждой дроби мы определим по методу неопределенных коэффициентов.

$$X(z) = \frac{A(1 - 0,75z^{-1}) + B(1 + 0,5z^{-1})}{(1 + 0,5z^{-1})(1 - 0,75z^{-1})}.$$
$$\begin{cases} A + B = 1; \\ 0,5B - 0,75A = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы дает: $A = 0,4$ и $B = 0,6$.

$$X(z) = \frac{0,4}{(1 + 0,5z^{-1})} + \frac{0,6}{(1 - 0,75z^{-1})}.$$

Используя соответствие для тестовой последовательности

$$a^k u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}},$$

получаем

$$x[k] = 0,4(-0,5)^k u[k] + 0,6(0,75)^k u[k].$$

Вычисление обратного z-преобразования

Метод контурного интегрирования

При вычислении интеграла

$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{k-1} dz.$$

можно воспользоваться теоремой Коши о вычетах, по которой $x[k]$ равно сумме вычетов подынтегральной функции $Y(z) = X(z) z^{k-1}$ в особых точках (в данном случае – в полюсах z_p), охватываемых контуром интегрирования C :

$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C Y(z) dz = \sum_p \operatorname{Res}_{z_p} Y(z), \quad k \geq 0 \quad (17)$$

Для нахождения вычетов используются следующие формулы:

- в случае простого (однократного) полюса, т. е. полюса первого порядка

$$\operatorname{Res}_{z_p} Y(z) = \lim_{z \rightarrow z_p} Y(z)(z - z_p); \quad (18)$$

- в случае m -кратного полюса, т. е. полюса m -го порядка

$$\operatorname{Res}_{z_p} Y(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_p} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [Y(z)(z - z_p)^m]. \quad (19)$$

Пример 2. Найти последовательность $x[k]$, если ее z -образ

$$X(z) = \frac{z(1 - e^a)}{(z - e^a)(z - 1)}.$$

Решение.

Подынтегральное выражение обратного z -преобразования

$$Y(z) = X(z) z^{k-1} = \frac{z^k (1 - e^a)}{(z - e^a)(z - 1)}.$$

Функция $Y(z)$ имеет два простых полюса: $z_1 = e^a$ и $z_2 = 1$.

$$\begin{aligned} x[k] &= \operatorname{Res}_{z_1} Y(z) + \operatorname{Res}_{z_2} Y(z) = \lim_{z \rightarrow e^a} \frac{z^k (1 - e^a)}{(z - e^a)(z - 1)} (z - e^a) + \\ &+ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^k (1 - e^a)}{(z - e^a)(z - 1)} (z - 1) = (1 - e^{ak}), \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу каузальности последовательности $x[k] = 0 \quad k < 0$.

Ответ. $x[k] = (1 - e^{ak})u[k]$, где $u[k]$ — дискретная функция включения.

Вычисление обратного z-преобразования

Пример 3. Найти последовательность $x[k]$, если ее z-образ

$$X(z) = \frac{z e^a}{(z - e^a)^2}.$$

Решение.

Подынтегральное выражение обратного z-преобразования

$$Y(z) = X(z) z^{k-1} = \frac{z^k e^a}{(z - e^a)^2}.$$

Функция $Y(z)$ имеет один двукратный полюс $z_1 = e^a$.

$$\begin{aligned} x[k] &= \operatorname{Res}_{z_1} Y(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow e^a} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^k e^a}{(z - e^a)^2} (z - e^a)^2 \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow e^a} z^{k-1} e^a k = k e^{ak}, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Ответ. $x[k] = k e^{ak} u[k]$, где $u[k]$ — дискретная функция включения.

Метод разложения в степенной ряд

Из формулы прямого z-преобразования

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

получаем

$$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots + x[k]z^{-k} + \dots$$

Следовательно, коэффициенты ряда по степеням z^{-1} соответствуют значениям $x[k]$. Заметим, что z-форма также представляется полиномом, но посредством ее разложения в ряд, например, в ряд Маклорена:

$$X(z^{-1}) = X(0) + \frac{X'(0)}{1!} z^{-1} - \frac{X''(0)}{2!} z^{-2} + \dots$$

Тогда искомая последовательность записывается в виде

$$x[k] = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{d(z^{-1})^k} X(z^{-1}) \right]_{z^{-1}=0}$$

Вычисление обратного z-преобразования

Метод деления числителя z-формы на ее знаменатель

Смысл метода заключается в том, что передаточную функцию представить полиномом по степеням z^{-1} .

Из формулы прямого z-преобразования $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}$

получаем

$$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots + x[k]z^{-k} + \dots$$

Следовательно, коэффициенты ряда по степеням z^{-1} соответствуют значениям $x[k]$.

Пример 4. Найдем обратное z-преобразование функции:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0,25z^{-1} - 0,375z^{-2}}.$$

Разделим ее числитель на знаменатель

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 - 0,25z^{-1} - 0,375z^{-2} \\ \hline 1 - 0,25z^{-1} - 0,375z^{-2} & 1 + 0,25z^{-1} + 0,437z^{-2} + 0,203z^{-3} + \dots \\ \hline 0,25z^{-1} + 0,375z^{-2} & \\ - & \\ 0,25z^{-1} - 0,0625z^{-2} - 0,09375z^{-3} & \\ \hline 0,4375z^{-2} + 0,09375z^{-3} & \\ & \dots \end{array}$$

Первые значения $x[k]$ представлены таблицей

k	0	1	2	3
$x[k]$	1	0,250	0,437	0,203

Ограниченность рассмотренного способа заключается в том, что в ряде случаев мы не можем получить все $x[k]$.

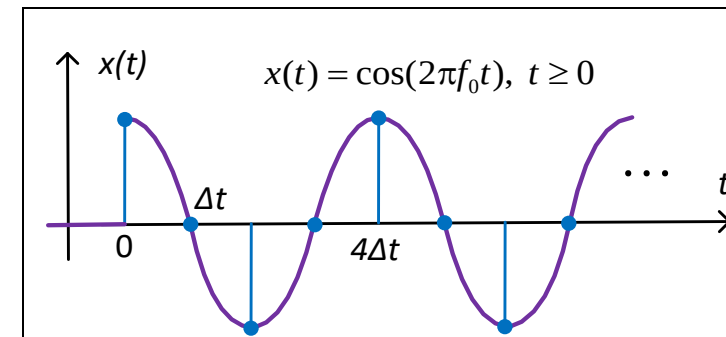
Пример 5.
$$X(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)}.$$

Делением числителя на знаменатель получаем

$$X(z) = 1 - z^{-2} + z^{-4} - z^{-6} \dots$$

Следовательно, $x[k] = \cos(k\pi/2)u[k]$.

Эта последовательность получается дискретизацией сигнала $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, $t \geq 0$, так, что имеется 4 отсчета на периоде, т. е. $\Delta t = 1/4 f_0$.



Вычисление обратного z-преобразования

Вычисление обратного z–преобразования с использованием таблицы соответствий		
	тестовая последовательность	z-образ
1	$\mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$	$X(z) = 1$
2	$\mathbf{1}[k - m] = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad m > 0$	$X(z) = z^{-m}$
3	$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases}$	$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1},$ сходится при $ z > 1$
4	$u[k - m] = \begin{cases} 1, & k \geq m, \\ 0, & k < m, \end{cases} \quad m > 0$	$\frac{z^{-m}}{1 - z^{-1}},$ сходится при $ z > 1$
5	$x[k] = a^k u[k]$	$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a},$ сходится при $ z > a .$

6	$x[k] = k a^k u[k]$	$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} = \frac{az}{(z - a)^2},$ сходится при $ z > a .$
7	$x[k] = r^k \frac{\sin(k + 1)\theta_0}{\sin \theta_0} u[k]$	$X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$ $a_1 = -2r \cos \theta_0, \quad a_2 = r^2$
8	$x[k] = r^k \sin(\theta_0 k) u[k]$	$X(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$ $a_1 = -2r \cos \theta_0, \quad a_2 = r^2,$ $b_1 = r \sin \theta_0$
9	$x[k] = r^k \cos(\theta_0 k) u[k]$	$X(z) = \frac{1 - b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$ $a_1 = -2r \cos \theta_0, \quad a_2 = r^2,$ $b_1 = r \cos \theta_0$

Вычисление обратного z-преобразования

П. 1-6 для таблицы соответствий были получены на лекции. Рассмотрим вопрос о том, как получить п. 9.

Пример 6. Найдем z-преобразование последовательности

$$x[k] = r^k \cos(\theta_0 k) u[k], \theta_0 = \omega_0 \Delta t.$$

Решение.

Запишем $x[k]$ в виде

$$x[k] = \frac{1}{2} (r^k e^{j\theta_0})^k u[k] + \frac{1}{2} (r^k e^{-j\theta_0})^k u[k].$$

По таблице соответствий $u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}}$. Тогда

$$\frac{1}{2} (r^k e^{j\theta_0})^k u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1/2}{1 - r e^{j\theta_0} z^{-1}}, \quad \text{сходится при } |z| > r,$$

$$\frac{1}{2} (r^k e^{-j\theta_0})^k u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1/2}{1 - r e^{-j\theta_0} z^{-1}}, \quad \text{сходится при } |z| > r.$$

Тогда по свойству линейности

$$X(z) = \frac{1/2}{1 - r e^{j\theta_0} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - r e^{-j\theta_0} z^{-1}} = \frac{1 - r z^{-1} \cos \theta_0}{1 - 2 r z^{-1} \cos \theta_0 + r^2 z^{-2}},$$

сходится при $|z| > r$.

Пример 7. Найти последовательность $x[k]$ по известному z-изображению

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

Решение. Числитель $X(z)$ — многочлен ненулевой степени, поэтому $X(z)$ следует представить в виде суммы дробей

$$X(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}.$$

В таблице соответствий находится z-изображение с таким же знаменателем и записывается соответствие

$$a^k u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}. \quad (20)$$

Используя теорему о задержке и соответствие (20), получаем последовательность

$$x[k] = b_0 a^k u[k] + b_1 a^{k-1} u[k-1].$$

Задачи для самостоятельного решения с лекции 21 октября 2024 г.

№1. Пусть

$$X(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}.$$

а) Найти обратное z -преобразование функции $X(z)$ методом разложения на простые дроби.

б) Определить последовательность $x[k]$, если

$$a = 0,5 + j0,5 \text{ и } b = a^* = 0,5 - j0,5.$$

№2. Используя основную теорему о вычетах, найти обратное z -преобразование функции

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0,25z^{-2}}.$$

№3. Методом разложения на простые дроби найти последовательность $x[k]$ по известному z -образу

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1} + 0,06z^{-2}}.$$

Литература

1. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. Часть 1. Москва. 2007г.
2. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале MATLAB: учеб. пособие. — СПб.: БХВ-Петербург, 2021. — 560 с.: ил.
3. Васильев, В. П. Основы теории и расчета цифровых фильтров: учебное пособие / В. П. Васильев, Э. Л. Муро, С. М. Смольский ; под ред. С. М. Смольского .— 2-е изд., стереотип. — Москва : ИНФРА-М, 2020
4. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов: пер. с англ. / под ред. С.Ф. Боева. — 3-е изд., испр. — М.: Техносфера, 2019.

Книги [1-3] есть в библиотеке МФТИ

(см. <http://ruslanlib.phystech.edu/pwb/>), книга [4] доступна из сети МФТИ по ссылке <https://reader.lanbook.com/book/73524>

Дополнительные примеры решения задач

Пример 8. Используя z -преобразование, найти линейную дискретную свертку

$$s[k] = x_1[k] \otimes x_2[k], \quad \text{где } x_1[k] = a^k u[k], \quad x_2[k] = u[k],$$

где $u[k]$ — дискретная функция включения, $|a| < 1$.

Решение. Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, находим z -образы $x_1[k]$ и $x_2[k]$

$$X_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > a,$$

$$X_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1.$$

По теореме о свертке (с учетом $|a| < 1$)

$$S(z) = X_1(z) X_2(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1.$$

Чтобы определить последовательность $s[k]$, нужно найти обратное z -преобразование для функции $S(z)$. Сделаем это двумя способами.

Способ 1. Разложение на простые дроби.

$$S(z) = \frac{A}{(1 - az^{-1})} + \frac{B}{(1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1, \quad (21)$$

Коэффициенты каждой дроби мы определим по методу неопределенных коэффициентов. Для этого приведем правую часть (21) к общему знаменателю и получившийся полином в числителе приравняем к полиному числителя левой части:

$$\begin{cases} A + B = 1; \\ aB + A = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{a}{1-a}; \\ B = \frac{1}{1-a}. \end{cases}$$

$$S(z) = -\left(\frac{a}{1-a}\right) \frac{1}{(1 - az^{-1})} + \left(\frac{1}{1-a}\right) \frac{1}{(1 - z^{-1})}.$$

Используя соответствие

$$b^k u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{(1 - bz^{-1})},$$

получаем

$$s[k] = \left(\frac{a}{a-1} \cdot a^k + \frac{1}{1-a} \right) u[k] = \left(\frac{1}{1-a} + \frac{a^{k+1}}{a-1} \right) u[k] = \frac{1 - a^{k+1}}{1-a} u[k]$$

Дополнительные примеры решения задач

Способ 2. Интегрирование по контуру.

$$S(z) = X_1(z)X_2(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-a)(z-1)}, |z| > 1$$

$$s[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C S(z) z^{k-1} dz.$$

Подынтегральное выражение обратного z-преобразования

$$Y(z) = S(z) z^{k-1} = \frac{z^{k+1}}{(z-a)(z-1)}.$$

При $k \geq 0$ $Y(z)$ имеет два полюса первого порядка.

Используя теорему Коши о вычетах, получаем

$$\begin{aligned} s[k] &= \operatorname{Res}_{z_1} Y(z) + \operatorname{Res}_{z_2} Y(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^{k+1}}{(z-a)(z-1)} (z-a) + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{k+1}}{(z-a)(z-1)} (z-1) = \\ &= \frac{a^{k+1}}{a-1} + \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{k+1}}{1-a} = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Ответ.

$$s[k] = \frac{1-a^{k+1}}{1-a} u[k].$$

Пример 9. Определить при $\alpha > 0$ обратное z-преобразование функции

$$X(z) = \frac{(1-e^{-\alpha\Delta t})z}{z^2 - (1+e^{-\alpha\Delta t})z + e^{-\alpha\Delta t}} = \frac{(1-e^{-\alpha\Delta t})z}{(z-1)(z-e^{-\alpha\Delta t})}.$$

Способ 1. Метод деления числителя на знаменатель.

Последовательное деление (столбиком) числителя на знаменатель даёт

$$X(z) = (1-e^{-\alpha\Delta t})z^{-1} + (1-e^{-2\alpha\Delta t})z^{-2} + \dots (1-e^{-k\alpha\Delta t})z^{-k} + \dots$$

Легко видеть, что

$$x[k] = (1-e^{-\alpha k\Delta t})u[k]$$

Способ 2. Интегрирование по контуру.

$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{(1-e^{-\alpha\Delta t})z^k}{(z-1)(z-e^{-\alpha\Delta t})} dz,$$

где C – замкнутый контур интегрирования, включающий начало координат и полюса $z_{p_1} = 1$ и $z_{p_2} = e^{-\alpha\Delta t}$.

Дополнительные примеры решения задач

$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_c \frac{(1 - e^{-\alpha\Delta t}) z^k}{(z-1)(z - e^{-\alpha\Delta t})} dz.$$

Согласно теореме Коши о вычетах

$$\begin{aligned} x[k] &= \sum_i \operatorname{Res} X(z) z^{k-1} \Big|_{z=z_{p_i}} = \\ &= \operatorname{Res} \frac{(1 - e^{-\alpha\Delta t}) z^k}{(z-1)(z - e^{-\alpha\Delta t})} \Big|_{z=1} + \operatorname{Res} \frac{(1 - e^{-\alpha\Delta t}) z^k}{(z-1)(z - e^{-\alpha\Delta t})} \Big|_{z=e^{-\alpha\Delta t}} = \\ &= u[k](1 - e^{-\alpha k\Delta t}), \end{aligned}$$

Ответ.

$$x[k] = (1 - e^{-\alpha k\Delta t}) u[k].$$