

Приложение к лекции 21 октября 2024 г. Преобразование Лапласа в линейных системах

Некоторые сигналы, не удовлетворяющие условию абсолютной интегрируемости, не могут быть представлены в виде интеграла Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} dt,$$

т. к. для таких сигналов не определена и не существует спектральная функция $X(\omega)$. Например, для скачка напряжения

$$x(t) = \begin{cases} E, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

спектральная функция

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = (E / j\omega) \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-j\omega t} \right)$$

не определена, поскольку $\exp(-j\omega t)$ при $t \rightarrow \infty$ не стремится ни к какому пределу.

Умножим $x(t)$ на $\exp(-\beta t)$, где β – положительная константа выбирается так, чтобы колебание $x(t) \exp(-\beta t)$ было абсолютно интегрируемым. Тогда

$$X(\omega, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\beta t}] e^{-j\omega t} dt.$$

Для существования интеграла будем считать сигнал $x(t)$ *каузальным*, т. е. $x(t) = 0$ при $t < 0$. В этом случае

$$X(\omega, \beta) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-(\beta + j\omega)t} dt.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$x(t) e^{-\beta t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega, \beta) e^{j\omega t} d\omega.$$

Умножим обе части этого выражения на $\exp(\beta t)$ и заменим перемен-

ную интегрирования $p = \beta + j\omega$. Тогда два последних выражения приобретают вид

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad (1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta - j\infty}^{\beta + j\infty} X(p) e^{pt} dp. \quad (2)$$

Это есть пара одностороннего преобразования Лапласа, которое символически будем обозначать следующим образом:

$$x(t) \Leftrightarrow X(p).$$

Функция $x(t)$ называется *оригиналом*, а функция $X(p)$ – *изображением*. Преобразование Фурье является частным случаем преобразования Лапласа, в котором достаточно положить. Обратное преобразование (2) осуществляется путём интегрирования в комплексной плоскости p вдоль вертикальной прямой $(\beta - j\infty, \beta + j\infty)$ (рис. 1).

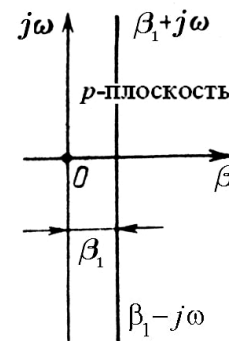


Рис. 1

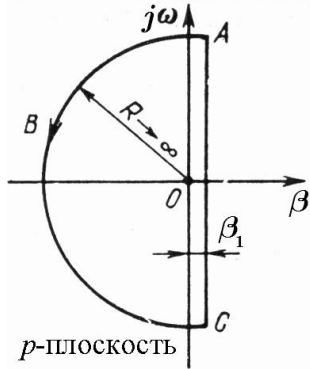


Рис. 2

Путь интегрирования должен проходить правее полюсов подынтегральной функции $X(p) \cdot e^{pt}$. образуем замкнутый контур интегрирования добавлением к прямой $(\beta_1 - j\infty, \beta_1 + j\infty)$ дуги бесконечно большого радиуса так, чтобы этот контур охватывал все полюсы подынтегральной функции (рис. 2). Тогда интеграл (2) превращается в контурный и в соответствии с теоремой Коши о вычетах может быть определен следующим образом:

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{ABCA} X(p) e^{pt} dp = \sum_k \text{Res}_{p=p_k} \quad (3)$$

Правая часть этого выражения равна сумме вычетов в полюсах подынтегральной функции. Важное свойство контурного интеграла: он не зависит от формы замкнутого контура интегрирования.

Пример 1. Пусть $x(t) = \exp(p_0 t) \cdot \sigma(t)$, где $p_0 = \beta_0 + j\omega_0$ – фиксированное комплексное число. Наличие функции включения $\sigma(t)$ обуславливает равенство $x(t) = 0$ при $t < 0$. Согласно (1)

$$X(p) = \int_0^\infty e^{-(p-p_0)t} dt = -\frac{e^{-(p-p_0)t}}{p-p_0} \Big|_{t=0}^{t=\infty}$$

При условии $\text{Re } p = \beta > \beta_0$ числитель обращается в нуль при $t \rightarrow \infty$. В результате получаем соответствие

$$e^{p_0 t} \sigma(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p - p_0} \quad (4)$$

Полюс в точке $p = p_0$.

Для действительного экспоненциального импульса

$$e^{-\beta_1 t} \sigma(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p + \beta_1} \quad (5)$$

Полюс в точке $p = -\beta_1$ ($\beta_1 > 0$).

Пример 2. Пусть $x(t) = e^{-\beta_2 t} \cos \omega_2 t \sigma(t)$ и $\beta_2 > 0$. Тогда

$$X(p) = \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty e^{-\beta_2 t} (e^{j\omega_2 t} + e^{-j\omega_2 t}) e^{-pt} dt \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - p_2} + \frac{1}{p - p_2^*} \right), \text{ где } p_2 = -\beta_2 + j\omega_2.$$

Функция $X(p)$ имеет два полюса в точках

$$p = p_2 = -\beta_2 + j\omega_2 \text{ и } p = p_2^* = -\beta_2 - j\omega_2.$$

Положение полюсов показано на рис. 3.

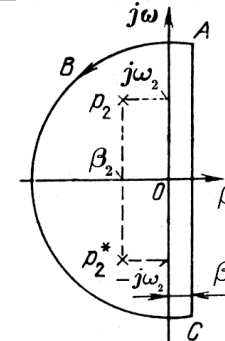


Рис. 3

Теорема разложения Хевисайда

Вычисление обратного преобразования значительно упрощается, когда $X(p)$ является рациональной функцией, которую всегда можно разложить на элементарные дроби. Так если рациональная функция является правильной (степень числителя меньше степени знаменателя) и корни знаменателя (полюса $X(p)$) являются простыми или различными, то всегда можно записать

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0} = \\ &= \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_m)} = \\ &= \frac{k_1}{p-p_1} + \frac{k_2}{p-p_2} + \dots + \frac{k_m}{p-p_m}, \end{aligned} \quad (6)$$

где k_1, k_2, \dots, k_m – вычеты $X(p)$, т. е.

$$k_i = \text{Res}_{p=p_i} [X(p)(p-p_i)]_{p=p_i}.$$

В этом случае с учётом (4) имеем

$$x(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_m e^{p_m t}, \quad t > 0. \quad (7)$$

Если полином знаменателя $X(p)$ содержит кратные корни, то процедура разложения на простые дроби несколько усложняется. В этом случае к результату разложения необходимо добавить дополнительные члены, соответствующие степеням повторяющегося члена вплоть до порядка самого полюса.

Пример 3. Пусть

$$X(p) = \frac{p+3}{p^2+p} = \frac{p+3}{p(p+1)} = \frac{k_0}{p} + \frac{k_1}{p+1},$$

где

$$k_0 = [X(p) \cdot p]_{p=0} = \frac{p+3}{p+1} \Big|_{p=0} = 3,$$

$$k_1 = [X(p)(p+1)]_{p=-1} = \frac{p+3}{p} \Big|_{p=-1} = -2.$$

В соответствии с (7) получаем

$$x(t) = 3 - 2e^{-t}.$$

Пример 4 (случай кратных полюсов).

$$X(p) = \frac{1}{(p+1)^3(p+2)} = \frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{(p+1)^2} + \frac{k_3}{(p+1)^3} + \frac{k_4}{p+2}.$$

Вычет k_4 и коэффициент k_3 находятся сразу:

$$k_4 = [X(p)(p+2)]_{p=-2} = \frac{1}{(p+1)^3} \Big|_{p=-2} = -1,$$

$$k_3 = [X(p)(p+1)^3]_{p=-1} = \frac{1}{p+2} \Big|_{p=-1} = 1.$$

Составляем равенство

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{p+1} - \frac{1}{p+2} + \frac{k_2}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3} &= \frac{1}{(p+1)^3(p+2)} = \\ &= \frac{k_1(p+1)^2(p+2) - (p+1)^3 + k_2(p+1)(p+2) + (p+2)}{(p+1)^3(p+2)}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при максимальных степенях, имеем

$$k_1 p^3 - p^3 = 0 \text{ или } k_1 = 1.$$

Сравнение коэффициентов при следующей степени даёт

$$k_1(2p^2 + 2p^2) - 3p^2 + k_2 p^2 = 0 \text{ или } k_2 = -1.$$

Искомое разложение имеет вид

$$X(p) = \frac{1}{(p+1)^3(p+2)} = \frac{1}{(p+1)^3} - \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}.$$

Чтобы получить оригинал по данному изображению, обратимся к теореме умножения на t . Суть её в следующем. Пусть $x(t) \Leftrightarrow X(p)$.

Тогда

$$tx(t) \Leftrightarrow -\frac{dX(p)}{dp}, \quad (8)$$

что следует непосредственно из дифференцирования прямого преобразования Лапласа (1). Используя эту теорему, получаем

$$te^{-\alpha t} \Leftrightarrow -\frac{d}{dp} \frac{1}{p+\alpha} = \frac{1}{(p+\alpha)^2}, \quad (9)$$

в общем случае

$$t^n e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}. \quad (10)$$

Возвращаясь к нашему примеру, для оригинала будем иметь

$$x(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t} - te^{-t} + e^{-t} - e^{-2t}, \quad t > 0.$$

Одностороннее преобразование Лапласа широко применяется при анализе переходных процессов в линейных системах, когда начало отсчёта времени совмещают с началом воздействия. Возможность учитывать начальное состояние сигнала при $t=0$ дает возможность применять одностороннее преобразование Лапласа для решения линейных дифференциальных уравнений с известными начальными условиями.

Применение преобразования Лапласа для анализа цепей

Рассмотрим простейшие двухполюсные элементы, изображенные на рис. 4. Основные соотношения для этих элементов:

$$v(t) = Ri(t); \quad i(t) = C \frac{dv}{dt} \quad \text{или} \quad v(t) - v(0) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau;$$

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{или} \quad i(t) - i(0) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau;$$

$v_0(t)$ не зависит от $i(t)$; $i_0(t)$ не зависит от $v(t)$.

В области изображений резистор описывается соотношением

$$V(p) = RI(p), \quad (11)$$

где $v(t) \Leftrightarrow V(p)$ и $i(t) \Leftrightarrow I(p)$ – пары преобразования Лапласа.

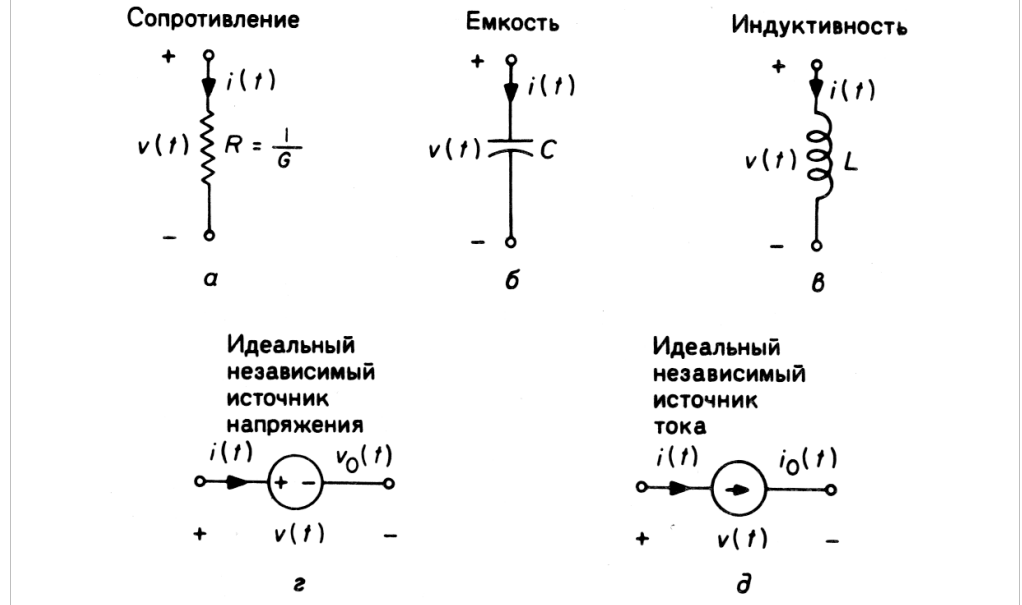


Рис. 4

Чтобы получить эквивалентные соотношения для ёмкости и индуктивности, нам потребуется теорема дифференцирования. Пусть $x(t) \Leftrightarrow X(p)$,

тогда

$$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow pX(p) - x(0). \quad (12)$$

Доказательство теоремы простое:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-pt} dt = x(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt = pX(p) - x(0).$$

Применяя эту теорему, находим эквивалентные соотношения для ёмкости и индуктивности в области изображений:

$$I(p) = CpV(p) - Cv(0) \quad (13)$$

или

$$V(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{v(0)}{p}, \quad (14)$$

$$V(p) = pLI(p) - Li(0) \quad (15)$$

или

$$I(p) = \frac{1}{pL} V(p) + \frac{i(0)}{p}. \quad (16)$$

Из (14) видно, что в частотной области ёмкость представляется в виде импеданса $Z(p) = 1/pC$, последовательно с которым включён источник «напряжения» $v(0)/p$, отражающий её начальное состояние. Аналогично, из (16) заключаем, что в частотной области индуктивность представляется импедансом $Z(p) = pL$ с параллельно включённым «источником тока» $i(0)/p$, отражающим её начальное состояние. Эти представления элементов в частотной области изображены на рис. 5.

В результате таких представлений для линейных инвариантных во времени цепей (ЛИВ-цепей) получается система алгебраических уравнений, которые в решении и интерпретации значительно проще дифференциальных уравнений. Приведём несколько примеров.

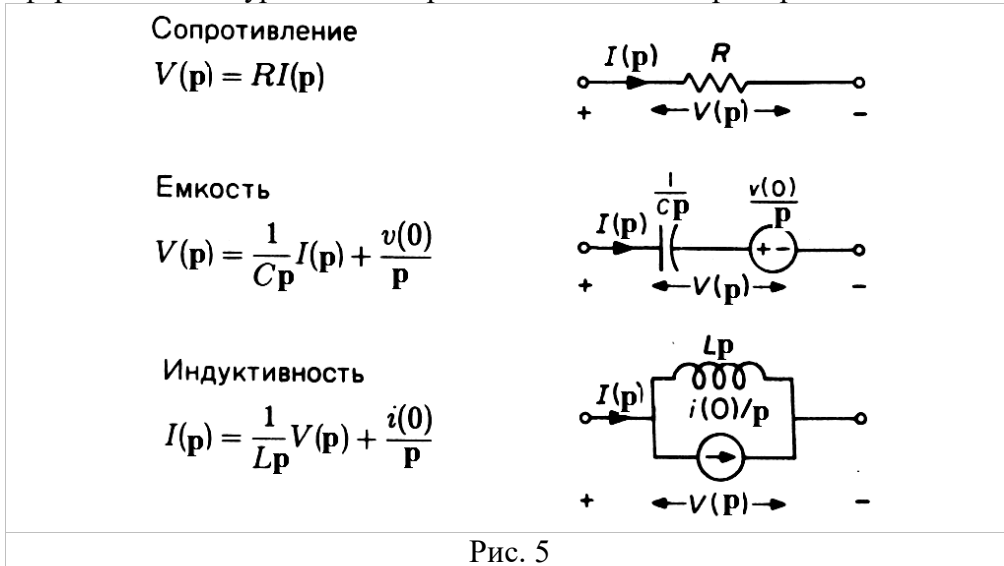


Рис. 5

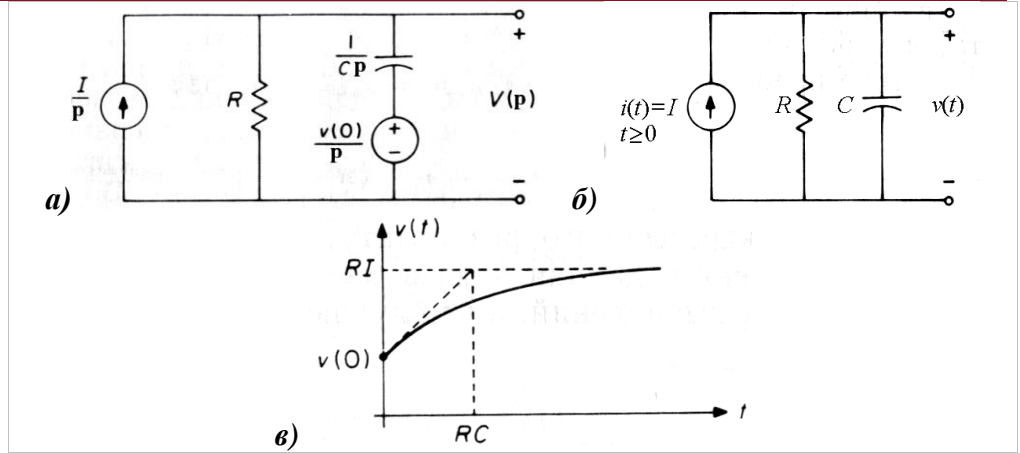


Рис. 6

Пример 5. Рассмотрим цепь первого порядка, на которую действует скачок тока (рис. 6а). Требуется найти отклик $v(t)$. Изображение этой цепи в частотной области (рис. 6б) позволяет записать следующее уравнение:

$$\frac{I}{p} = \frac{V(p)}{R} + \left(V(p) - \frac{v(0)}{p} \right) pC.$$

Здесь использован тот факт, что $I\sigma(t) \Leftrightarrow \frac{I}{p}$.

Решая относительно $V(p)$, находим

$$V(p) = \frac{(I/C) + v(0)p}{p(p + 1/RC)}.$$

Эта функция имеет два полюса: $p_1 = 0$ и $p_2 = -1/RC$. Вычеты в этих точках соответственно будут $k_1 = IR$ и $k_2 = v(0) - IR$. Используя формулы Хевисайда (6) и (7), получаем окончательно

$$v(t) = IR + (v(0) - IR)e^{-t/RC}, \quad t > 0. \quad (17)$$

График этой функции (переходной характеристики цепи) представлен на рис. 6в.

Пример 6.

Рассмотрим параллельный колебательный контур, подключённый к источнику тока $i(t)$ (рис. 7а). Найти отклик $v(t)$.

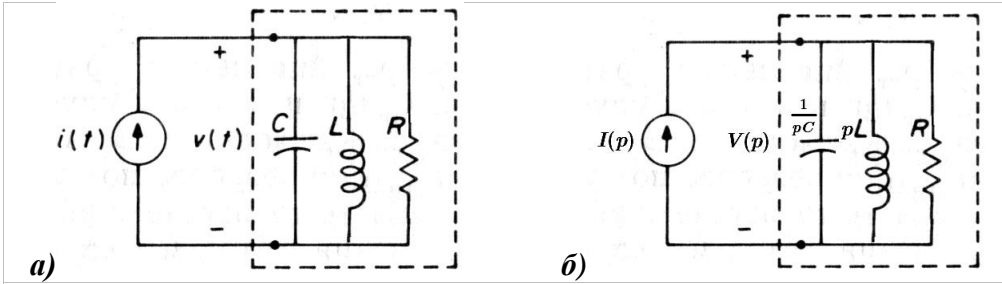


Рис. 7. Параллельный колебательный контур (а) и его изображение (б)

Пусть на контур действует перепад тока $i(t) = I\sigma(t)$, тогда $I(p) = I/p$.

Запишем уравнение Кирхгофа в области изображений:

$$\frac{I}{p} = V(p) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{pL} + pC \right).$$

Отсюда

$$V(p) = \frac{I}{p \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{pL} + pC \right)} = \frac{IL}{\left(\frac{L}{R}p + 1 + p^2LC \right)} = \frac{I\omega_0^2 L}{(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)}, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \alpha = \frac{R}{2L}.$$

Функция $V(p)$ имеет два полюса:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm j\omega, \text{ где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Поэтому

$$V(p) = \frac{I\omega_0^2 L}{(p - p_1)(p - p_2)}.$$

Находим вычеты в полюсах: $k_1 = \frac{I\omega_0^2 L}{2j\omega} = \frac{I}{2j\omega C}$ и $k_2 = \frac{I\omega_0^2 L}{-2j\omega} = -\frac{I}{2j\omega C}$.

По формулам Хевисайда (6) и (7) получаем

$$v(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} = \frac{I}{2j\omega C} (e^{-(\alpha - j\omega)t} - e^{-(\alpha + j\omega)t}) = \frac{I}{\omega C} e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

При слабом затухании $\alpha \ll \omega \approx \omega_0$, и отклик контура на перепад тока будет

$$v(t) = I \sqrt{\frac{L}{C}} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t = I\rho e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t. \quad (18)$$

Здесь $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – характеристическое сопротивление контура. График этой функции изображён на рис. 8.

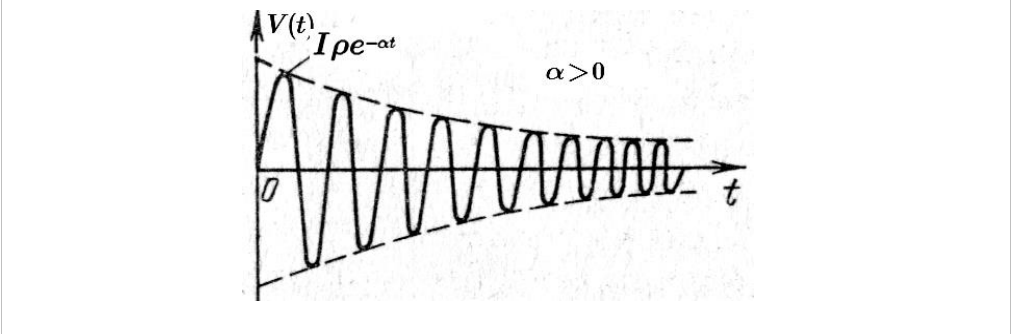


Рис. 8. Отклик параллельного колебательного контура на перепад тока

Основные свойства одностороннего преобразования Лапласа

Т а б л и ц а 1.10.1

Линейности	$a x_1(t) + b x_2(t) \Leftrightarrow a X_1(p) + b X_2(p)$
Задержки	$x(t-T) u(t-T) \Leftrightarrow X(p) e^{-pT}, \quad T > 0$
Умножения на t	$t x(t) \Leftrightarrow -\frac{dX(p)}{dp}$
Умножение на $e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha t} x(t) \Leftrightarrow X(p+\alpha)$
Масштабирования	$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} X\left[\frac{p}{a}\right], \quad a > 0$
Дифференцирования	$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow pX(p) - x(0)$
Интегрирования	$\int_0^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{X(p)}{p}$
Свертки	$\int_0^t x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \Leftrightarrow X_1(p) X_2(p)$

Т а б л и ц а 1.10.2

$x(t)$	\Leftrightarrow	$X(p)$
$\delta(t)$	\Leftrightarrow	1
$\sigma(t) = 1$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\sin \omega_0 t$	\Leftrightarrow	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$\cos \omega_0 t$	\Leftrightarrow	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$

$$e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega_0^2}$$

Упражнения и задачи

1. Показать справедливость приведенных ниже преобразований. Всюду считать α и ω_0 положительными величинами.

	$x(t), t > 0$	$X(p)$
а)	$1 - e^{-\alpha t}$	$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{p(p+\alpha)}, \text{ Re } [p] > 0,$
б)	$e^{+\alpha t} \sin \omega_0 t$	$\Leftrightarrow \frac{\omega_0}{(p-\alpha)^2 + \omega_0^2}, \text{ Re } [p] > \alpha,$
в)	$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \pi/4)$	$\Leftrightarrow \frac{p+\alpha-\omega_0}{\sqrt{2}[(p+\alpha)^2 + \omega_0^2]}, \text{ Re } [p] > -\alpha,$
г)	$t e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$	$\Leftrightarrow \frac{(p+\alpha)^2 - \omega_0^2}{[(p+\alpha)^2 + \omega_0^2]^2}, \text{ Re } [p] > -\alpha,$
д)	$\begin{cases} 1, & 1 < t < 2 \\ 0, & \text{в остальных точках} \end{cases}$	$\Leftrightarrow \frac{1}{p[e^{-p} - e^{-2p}]}, \text{ при любом } p,$
е)	$\begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 2-t, & 1 < t < 2 \\ 0, & \text{в остальных точках} \end{cases}$	$\Leftrightarrow \left(\frac{1-e^{-p}}{p}\right)^2, \text{ при любом } p,$
ж)	$\text{ch } \alpha t$	$\Leftrightarrow \frac{p}{p^2 - \alpha^2}, \text{ Re } [p] > \alpha,$
з)	$e^{-\alpha t} \sigma(t-1)$	$\Leftrightarrow \frac{e^{-(p+\alpha)}}{p+\alpha}, \text{ Re } [p] > -\alpha,$
и)	$1 - (1+\alpha t)e^{-\alpha t}$	$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{p(p+\alpha)^2}, \text{ Re } [p] > 0.$

2. Показать справедливость обратных преобразований

	$X(p)$	$x(t), t > 0$
а)	$\frac{1}{(p+1)(p+2)}$	$\Leftrightarrow e^{-t} - e^{-2t}$,
б)	$\frac{p+3}{(p+1)(p+2)}$	$\Leftrightarrow 2e^{-t} - e^{-2t}$,
в)	$\frac{1}{p^2 - \alpha^2}$	$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \text{sh} \alpha t$,
г)	$\frac{1}{(p+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\Leftrightarrow \frac{1}{\omega_0} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$,
д)	$\frac{1}{p} (1 - e^{-p})^2$	$\Leftrightarrow \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & 1 < t < 2 \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases}$
е)	$\frac{1}{p^2 + 1} (1 - e^{-2\pi p})$	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin t, & 0 < t < 2\pi \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases}$
ж)	$\frac{p+2}{(p+1)^2}$	$\Leftrightarrow (1+t)e^{-t}$,
з)	$\frac{1}{p^2(p-1)}$	$\Leftrightarrow e^t - (1+t)$.

3. Для линейной инвариантной во времени системы (ЛИВ-системы) с каузальной импульсной характеристикой $h(t)$ системная функция $H(p)$ по определению равна

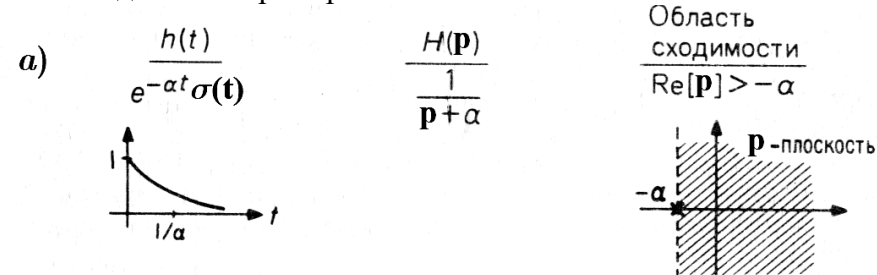
$$H(p) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt} dt.$$

Областью сходимости системной функции является полуплоскость

$$\text{Re}[p] > \beta_1,$$

где β_1 – минимальное действительное число, при котором соблюдается условие сходимости преобразования Лапласа от $h(t)$. В этой области системная функция является аналитической.

Для каждой из приведённых в задачах б, в, г, д импульсных характеристик определить системную функцию и область сходимости так, как это сделано в примере а.



б) $h(t) = e^{-\alpha_2 t} \cos \omega_2 t, \alpha_2 > 0, t \geq 0.$

в) $h(t) = e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t, \alpha_2 > 0, t \geq 0.$

г) $h(t) = \sin \omega_3 t, t \geq 0.$ д) $h(t) = \cos \omega_3 t, t \geq 0.$

4. Сопротивление R , индуктивность L и ёмкость C , соединённые последовательно, подключены при $t=0$ к источнику постоянного напряжения E . Найти ток в цепи при нулевых начальных условиях с использованием изображений по Лапласу.

5. Получить аналитическое выражение для импульсной характеристики дифференцирующей RL-цепи.

6. Конденсатор C , заряженный до напряжения E , разряжается через последовательно соединённые индуктивность L и резистор R . Пользуясь изображением по Лапласу, определить ток в цепи $i(t)$.

7. В последовательный RLC контур в момент $t=0$ включается синусоидальная ЭДС $e(t) = \sin \omega_1 t$. Найти ток в контуре $i(t)$ при $t > 0$, используя изображения по Лапласу.

- 8.** К параллельно соединённым резистору R и индуктивности L через резистор R_1 в момент $t=0$ подключается источник ЭДС $u(t) = Ee^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$. Начальный ток в индуктивности $i_L(0) \neq 0$. Получить изображение цепи в p -плоскости. Найти ток в индуктивности $i_L(t)$, $t > 0$.
- 9.** К интегрирующей RC -цепочке в момент $t=0$ подключается ЭДС $Ee^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$. Считая $u_c(0) \neq 0$, определить напряжение на ёмкости при $t > 0$.
- 10.** В последовательный RLC -контур в момент $t=0$ включается синусоидальная ЭДС $e(t) = \cos \omega_1 t$. Найти ток в контуре $i(t)$ при $t > 0$, используя изображения по Лапласу.