

Глава 4. Z-преобразование в дискретных системах

Z-преобразование дискретных сигналов широко используют при анализе и синтезе дискретно-аналоговых и цифровых устройств обработки сигналов. По отношению к дискретным сигналам оно играет ту же роль, какую играют интегральные преобразования Фурье и Лапласа по отношению к аналоговым сигналам.

4.1. Переход от преобразования Лапласа к z-преобразованию

Преобразование Лапласа можно рассматривать как обобщение преобразования Фурье на случай комплексных частот $p = \beta + j\omega$, где β – положительная константа, выбираемая так, чтобы сигнал $x(t) \cdot e^{-\beta t}$ был абсолютно интегрируемым при $t \geq 0$: [Equation Chapter 4 Section 1](#)

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt < \infty, \quad (4.1.1)$$

$$x(t) = (1/j2\pi) \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} X(p) e^{pt} dp. \quad (4.1.2)$$

Это есть пара преобразования Лапласа. Обратное преобразование (4.1.2) совершается путем интегрирования в комплексной плоскости p вдоль вертикальной прямой $\beta = \text{const}$. Преобразование Фурье является частным случаем преобразования Лапласа, в котором достаточно p заменить на $j\omega$, т. е. положить $\beta = 0$.

Пусть теперь $x(t)$ дискретизуется с шагом Δt . Подставим в (4.1.1) выражение для дискретизованного сигнала:

$$x_d(t) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t),$$

а в (4.1.2) перейдем от t к $k\Delta t$. Учитывая, что вдоль линии, параллельной оси $j\omega$, изображение $X_d(p)$ является периодической функцией с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_d = 2\pi / \Delta t$, получаем

$$X_d(p) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-pk\Delta t}, \quad (4.1.3)$$

$$x(k\Delta t) = (1/j2\pi) \int_{\beta-j\pi/\Delta t}^{\beta+j\pi/\Delta t} X_d(p) e^{pk\Delta t} dp. \quad (4.1.4)$$

Это есть пара дискретного преобразования Лапласа, которое иллюстрируется на рис. 4.1.1 для случая $\beta = 0$. [Equation Chapter 4 Section 1](#)

Представление (4.1.3) и (4.1.4) широко используется при анализе дискретных сигналов и цепей. Часто его применяют в несколько модифицированном виде, носящем название *z-преобразования*. Для этого перейдем к новой переменной $z = \exp(p\Delta t)$. Учитывая, что $dz = \Delta t \exp(p\Delta t) dp$ и $dp = dz / z\Delta t$, получаем

$$X(z) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}, \quad (4.1.1)$$

$$x(k) = (1/j2\pi\Delta t) \oint_C X(z) z^{k-1} dz, \quad (4.1.2)$$

где C – замкнутый контур в плоскости z , охватывающий все особые точки функции $X(z)z^{k-1}$. Выражения (4.1.5) и (4.1.6) определяют прямое и обратное z -преобразование соответственно. Здесь $x(k)$ – дискретный сигнал, определенный на бесконечном интервале $[0, \infty)$, а $X(z)$ является комплексной функцией непрерывного комплексного аргумента z .

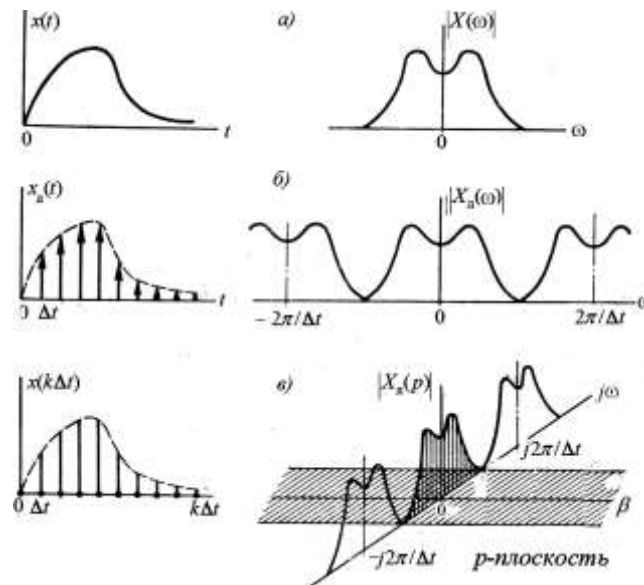


Рис. 4.1.1

Из теории функций комплексного переменного известно, что ряд (4.1.5) будет сходиться, если коэффициенты ряда удовлетворяют условию

$$|x(k)| < M \cdot R^k,$$

где $M > 0$ и $R > 0$ – постоянные вещественные числа. Ряд (4.1.5) будет сходиться при всех z , таких, что $|z| > R$ (рис. 4.1.2). В этой области $X(z)$ представляет собой аналитическую функцию z , не имеющую ни полюсов, ни существенно особых точек.



Рис. 4.1.2

Поскольку $z = e^{p\Delta t} = e^{(\beta + j\omega)\Delta t}$, то $|z| = e^{\beta\Delta t}$ и $\arg z = \omega\Delta t$. Переход от переменной p к переменной z соответствует отображению плоскости p на плоскость z , в результате которого линии, параллельные оси $j\omega$, отображаются в concentric окружности с центром в начале координат. Сама ось $j\omega$ отображается в единичную окружность, причем, когда ω меняется от $-\pi/\Delta t$ до $\pi/\Delta t$, отображающая точка совершает один оборот на единичной окружности (рис. 4.1.3б). Полоса шириной $\omega_d = 2\pi/\Delta t$ левой полуплоскости p отображается внутрь круга единичного радиуса в плоскости z (рис. 4.1.3в). Правая полуплоскость p преобразуется во

всю z -плоскость, исключая единичный круг, рис. 4.1.3г.

Все полюсы функции $X(p)$, которые расположены в плоскости p на одной вертикали с интервалом $\omega_d = 2\pi/\Delta t$, отображаются в единственный полюс $X(z)$ в плоскости z (рис. 4.1.3д).

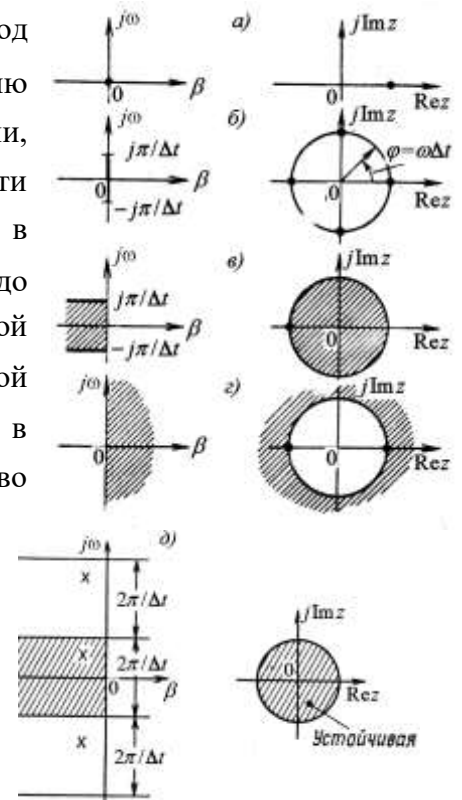


Рис. 4.1.3. Отображение плоскости p в плоскость z .

Функция $X_d(p)$ (рис. 4.1.1) отображается в функцию $X(z)$ так, что одному периоду $X_d(p)$ соответствует один оборот по окружности в плоскости z (рис. 4.1.4).

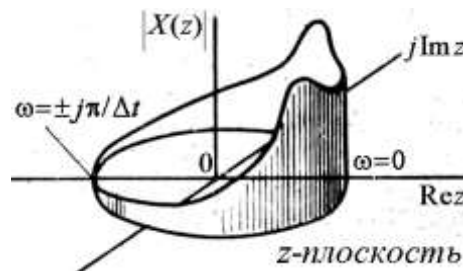


Рис. 4.1.4

Отметим еще, что $e^{-p\Delta t}$ соответствует задержке на один интервал дискретизации в плоскости p , в то время как z^{-1} означает такую же задержку в плоскости z .

4.2. Свойства z -преобразования

Перечислим наиболее важные свойства z -преобразования, которые используются в дальнейшем. Пару z -преобразования будем обозначать $x(k) \leftrightarrow X(z)$, где по-прежнему $x(k)$ – каузальный сигнал, т. е. $x(k) = 0$ при $k < 0$.

Если в (4.1.5) и (4.1.6) положить $\Delta t = 1$, то пара z -преобразования записывается в виде [Equation Chapter 4 Section 2](#)

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}, \quad (4.2.1)$$

$$x(k) = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z)z^{k-1} dz. \quad (4.2.2)$$

Этой формой записи мы будем пользоваться в дальнейшем.

1) *Линейность*. Если

$$x_1(k) \xrightarrow{Z} X_1(z) \text{ и } x_2(k) \xrightarrow{Z} X_2(z),$$

то

$$ax_1(k) + bx_2(k) \xrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z). \quad (4.2.3)$$

2) *Теорема запаздывания*. Если

$$x(k) \xrightarrow{Z} X(z), \text{ то } x(k-m) \xrightarrow{Z} z^{-m} X(z). \quad (4.2.4)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x(k-m)z^{-k} &= z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} x(k-m)z^{-(k-m)} = \\ &= z^{-m} \sum_{l=0}^{\infty} x(l)z^{-l} = z^{-m} X(z). \end{aligned}$$

В последнем равенстве проведена замена $l = k - m$ и использовано свойство каузальности сигнала $x(l)$, т. е. $x(l) = 0$ при $l = k - m < 0$.

3) *Теорема о свертке*. Если

$$x(k) \xrightarrow{Z} X(z) \text{ и } h(k) \xrightarrow{Z} H(z),$$

то последовательность

$$y(k) = \sum_{m=0}^k x(m)h(k-m) \quad (4.2.5)$$

имеет z -преобразование

$$Y(z) = X(z)H(z), \quad (4.2.6)$$

т. е. z -преобразование линейной свертки двух последовательностей равно произведению их z -преобразований.

Доказательство

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^k x(m)h(k-m) \right] z^{-k}.$$

Сделаем замену $k - m = l$. В результате получим

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} \sum_{l=0}^{\infty} h(l)z^{-l} = X(z)H(z),$$

что и требовалось доказать.

4) *Связь с ДПФ*. Пусть $x(k)$ – последовательность конечной длины в N отсчетов. Тогда

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)z^{-k}.$$

5) Вычисляя эту сумму при $z = e^{j2\pi n/N}$, т. е. в точке единичной окружности с полярным углом $2\pi n/N$, получаем

$$X(z = e^{j2\pi n/N}) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi nk/N}, \quad (4.2.7)$$

что с точностью до масштабирующего множителя $1/N$ совпадает с коэффициентом ДПФ $X(n)$ последовательности $x(k)$. Поэтому можно сделать вывод: значения z-преобразования последовательности конечной длины в N отсчетов, взятые в N равномерно распределенных точках на единичной окружности, равны (с точностью до множителя $1/N$) коэффициентам ДПФ этой последовательности.

6) Умножение сигнала на k .

Продифференцируем по z обе части (4.2.1):

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} (-k) x(k) z^{-k-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на $-z$:

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} [k x(k)] z^{-k}.$$

Отсюда

$$k x(k) \xleftarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}. \quad (4.2.8)$$

7) Умножение на экспоненту.

Умножим последовательность $x(k)$ на экспоненту $e^{\pm ak\Delta t}$ (a в общем случае комплексное). z-преобразование такой последовательности

$$\sum_{k=0}^{\infty} [e^{\pm ak\Delta t} x(k)] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) (e^{\pm a\Delta t} z)^{-k} = X[z e^{\pm a\Delta t}].$$

Таким образом,

$$x(k) e^{\pm ak\Delta t} \xleftarrow{z} X[z e^{\pm a\Delta t}]. \quad (4.2.9)$$

Это теорема смещения для z-преобразования.

8) Теорема опережающего сдвига.

Для сигнала $x(k)$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \dots$$

Для опережающего сигнала $x(k+1)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k+1) z^{-k} = x(1) + x(2) z^{-1} + x(3) z^{-2} + \dots = z[X(z) - x(0)].$$

Таким образом,

$$x(k+1) \xleftarrow{z} z[X(z) - x(0)]. \quad (4.2.10)$$

4.3. Примеры z-преобразования

Рассмотрим некоторые тестовые последовательности

1) $x(k)$ – единичный импульс, т. е.

$$x(k) = \mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Очевидно, $X(z) = 1$ на всей z -плоскости.

2) $x(k)$ – единичный скачок, т. е.

$$x(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases}$$

тогда

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}.$$

Умножим обе части этого равенства на z^{-1} и вычтем новое из первого:

$$X(z) - X(z) z^{-1} = 1.$$

Отсюда

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1},$$

Функция $X(z)$ имеет нуль при $z = 0$ и полюс в точке $z = 1$. Сходится при $|z| > 1$ (рис. 4.4.1).

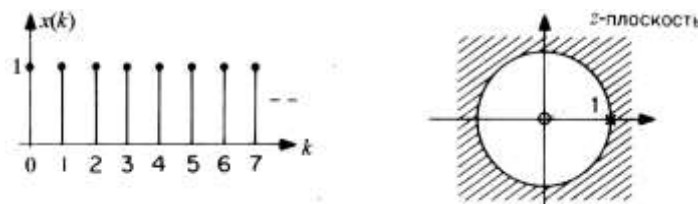


Рис. 4.4.1

3) $x(k)$ – действительная экспонента, т. е. $x(k) = a^k$, $k \geq 0$.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k.$$

Это сумма бесконечной геометрической прогрессии (знаменатель прогрессии $q = az^{-1}$).

Ряд сходится к

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a},$$

если $|az^{-1}| < 1$ или $|z| > |a|$. Функция $X(z)$ имеет нуль при $z = 0$ и полюс при $z = a$ на окружности, ограничивающей область сходимости (рис. 4.3.2).

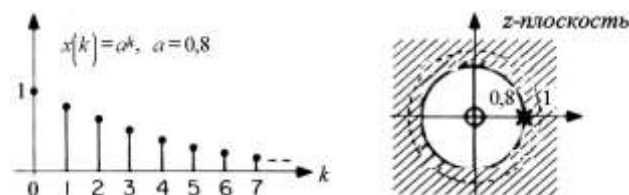


Рис. 4.3.2

4) $x(k) = ka^k$, $k \geq 0$.

С учетом предыдущего примера и теоремы умножения на k имеем

$$X(z) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-az^{-1}} \right) = \frac{az^{-2}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{a}{(z-a)^2}.$$

Функция $X(z)$ имеет двойной полюс при $z = a$.

4.4. Вычисление обратного z-преобразования

Метод разложения на простые дроби

Эффективный способ вычисления обратного z-преобразования аналогичен способу разложения на простейшие дроби в теореме Хевисайда. Форму разложения $X(z)$ на простейшие дроби выбираем так, чтобы были слагаемые вида $1 / (z - a_k)$, которые можно поставить в соответствие последовательности a^k , $k \geq 0$. (См. пример 3 в предыдущем параграфе).

Пример 4.4.1

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{30z^2}{6z^2 - z - 1} = \frac{5}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}} = \\ &= \frac{5}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}. \end{aligned}$$

Коэффициенты каждой дроби мы определили по методу неопределенных коэффициентов, т. е.

$$\begin{aligned} \left. \frac{5 \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \right|_{z^{-1} = 2} &= 3 \text{ (вычет в точке } z^{-1} = 2), \\ \left. \frac{5 \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \right|_{z^{-1} = -3} &= 2 \text{ (вычет в точке } z^{-1} = -3). \end{aligned}$$

Поскольку z-преобразование линейно, получаем

$$x(k) = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^k + 2 \left(-\frac{1}{3}\right)^k, \quad k \geq 0.$$

Пример 4.4.2

$$X(z) = \frac{(1 - e^{-\alpha\Delta t})z}{(z-1)(z - e^{-\alpha\Delta t})}, \quad \alpha > 0.$$

Разложим на простые дроби функцию

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1 - e^{-\alpha\Delta t}}{(z-1)(z - e^{-\alpha\Delta t})},$$

которая имеет полюсы в точках $z = 1$ и $z = e^{-\alpha\Delta t}$. Вычеты в этих точках будут 1 и -1 соответственно. Поэтому

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-\alpha\Delta t}} \quad \text{и} \quad X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-\alpha\Delta t}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-\alpha\Delta t} z^{-1}}.$$

Отсюда

$$x(k) = 1 - e^{-\alpha k \Delta t}.$$

Метод контурного интегрирования

Определим обратное z -преобразование для функции $X(z)$, заданной в предыдущем примере:

$$x(k) = \frac{1}{j2k\Delta t} \oint_c \frac{(1 - e^{-\alpha\Delta t})z}{(z-1)(z - e^{-\alpha\Delta t})} z^{k-1} dz,$$

где c – замкнутый контур интегрирования, включающий полюса $z = z_{p_1} = 1$ и $z = z_{p_2} = e^{-\alpha\Delta t}$.

По теореме вычетов

$$x(k) = \sum_i \operatorname{Res} X(z) z^{k-1} \Big|_{z=z_{p_i}}.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} x(k) &= \sum_i \operatorname{Res} \frac{(1 - e^{-\alpha\Delta t})z}{(z-1)(z - e^{-\alpha\Delta t})} z^{k-1} \Big|_{z=z_{p_i}} = \operatorname{Res} \frac{(1 - e^{-\alpha\Delta t})z^k}{(z-1)(z - e^{-\alpha\Delta t})} \Big|_{z=1} + \\ &+ \operatorname{Res} \frac{(1 - e^{-\alpha\Delta t})z^k}{(z-1)(z - e^{-\alpha\Delta t})} \Big|_{z=e^{-\alpha\Delta t}} = 1 - e^{-\alpha k \Delta t}, \end{aligned}$$

что совпадает с результатом, полученным методом разложения на простые дроби.

Метод разложения в степенной ряд

Из формулы прямого z -преобразование $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$ получаем

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + x(k)z^{-k} + \dots$$

Следовательно, коэффициенты ряда по степеням z^{-1} соответствуют значениям $x(k)$.

Пример 4.4.3. Определить обратное z -преобразование функции

$$X(z) = \frac{(1 - e^{-\alpha\Delta t})z}{z^2 - (1 + e^{-\alpha\Delta t})z + e^{-\alpha\Delta t}},$$

которая совпадает с функцией $X(z)$ из примера 4.4.2. Последовательное деление (столбиком) числителя на знаменатель даёт

$$X(z) = (1 - e^{-\alpha\Delta t})z^{-1} + (1 - e^{-2\alpha\Delta t})z^{-2} + \dots + (1 - e^{-k\alpha\Delta t})z^{-k} + \dots$$

Легко видеть, что

$$x(k) = 1 - e^{-\alpha k \Delta t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Пример 4.4.4. Пусть, например,

$$X(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)}.$$

Делением числителя на знаменатель получаем $X(z) = 1 - z^{-2} + z^{-4} - z^{-6} \dots$

Следовательно, $x(k) = \cos(k\pi/2)$. Эта последовательность получается дискретизацией сигнала $x(t) = \cos \omega t$, $t \geq 0$, так, что имеется 4 отсчета на периоде, т. е. $\omega\Delta t = \pi/2$. Это иллюстрируется на рис. 4.4.1.

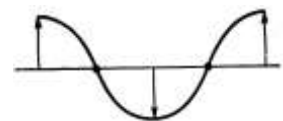


Рис. 4.4.1

4.5. Линейные дискретные фильтры

Пусть имеется линейный фильтр с импульсной характеристикой $h(t)$. При поступлении на вход фильтра сигнала $x(t)$, $t \geq 0$, отклик на его выходе определяется интегралом свертки

$$y(t) = \int_0^t x(t-\tau)h(\tau) d\tau.$$

Дискретному фильтру соответствует уравнение дискретной свертки:

$$y(k\Delta t) = \Delta t \sum_{m=0}^k x[(k-m)\Delta t]h(m\Delta t).$$

Если фильтр имеет конечную импульсную характеристику (КИХ фильтр), то

$$y(k\Delta t) = \Delta t \sum_{m=0}^{N-1} x[(k-m)\Delta t]h(m\Delta t). \quad (4.5.1)$$

Возможен и другой подход. Выходной отклик фильтра $y(k)$ определяется как функция присутствующего в данный момент на входе отсчета $x(k)$ и некоторого количества предшествующих входных и выходных отсчетов:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m x(k-m) + \sum_{m=1}^M b_m y(k-m). \quad (4.5.2)$$

Такой фильтр называется *рекурсивным*. Если $y(k)$ зависит только от входных отсчетов (настоящего и предшествующих), то фильтр называется *нерекурсивным*.

Если выборочные значения сигналов $x(k)$, $y(k)$ и коэффициенты фильтра a_m и b_m квантованы по величине, т. е. представлены цифровым кодом с ограниченным количеством разрядов, то фильтр называется *цифровым*.

Эффективным методом решения разностных уравнений (4.5.2) является z -преобразование.

Передаточная функция дискретного фильтра

Возвратимся к разностному уравнению дискретного фильтра (4.5.2). В терминах z -преобразования, с учетом его свойств, это уравнение будет иметь вид

$$Y(z) = X(z) \sum_{m=0}^{N-1} a_m z^{-m} + Y(z) \sum_{m=1}^M b_m z^{-m}.$$

Здесь z^{-1} – оператор задержки на один такт дискретизации.

Комплексный коэффициент передачи, т. е. *передаточная функция* фильтра:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} a_m z^{-m}}{1 - \sum_{m=1}^M b_m z^{-m}}. \quad (4.5.3)$$

Эта наиболее общая форма $H(z)$ является дробно-рациональной функцией z^{-1} и часто используется при анализе и синтезе дискретных и цифровых фильтров. Для физически реализуемых фильтров число нулей $H(z)$ не должно превышать числа полюсов, т. е. степень полинома в числителе не должна превышать степени полинома в знаменателе. В этом убедимся в следующей лекции.

Фильтр называется *устойчивым*, если при любых конечных начальных условиях и любом ограниченном входном сигнале выходной сигнал также остается ограниченным. Как будет показано,

необходимым и достаточным условием устойчивости фильтра является требование, чтобы модули полюсов его передаточной характеристики $H(z)$ были меньше 1. Например, при

$$H(z) = \frac{z+1}{(z+0,5)(z-0,4)}$$

фильтр будет устойчивым, т. к. он имеет два полюса, $z = -0,5$ и $z = 0,4$, по модулю меньшие единицы. Очевидно, что нерекурсивный фильтр всегда устойчив.

Неустойчивый фильтр неработоспособен в том случае, когда входной сигнал действует неограниченно долго, т. к. в конце концов, выходной сигнал перестанет зависеть от входного. Однако он работоспособен и используется в тех случаях, когда входной сигнал действует в течение ограниченного интервала времени. Примером такого фильтра является цифровой накопитель, которому соответствует разностное уравнение

$$y(k) = x(k) + y(k-1).$$

В терминах z -преобразования оно имеет вид

$$Y(z) = X(z) + z^{-1}Y(z).$$

Передаточная функция цифрового интегратора

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

имеет полюс в точке $z = 1$, фильтр неустойчивый. Однако цифровой накопитель работоспособен и используется в тех случаях, когда входной сигнал действует в течение ограниченного интервала времени, например, когда $0 \leq k \leq N-1$, после чего следует сброс, т. е. восстанавливаются нулевые начальные условия.

Импульсная и частотная характеристики дискретного фильтра

Дискретные и цифровые фильтры характеризуются также своей *импульсной характеристикой* $h(k)$, за которую по определению принимается реакция фильтра (при нулевом начальном состоянии) на входное воздействие в виде единичного импульса:

$$\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Для линейного инвариантного во времени дискретного фильтра (ЛИВДФ) импульсная характеристика $h(k)$ связана с передаточной функцией z -преобразованием:

$$H(z) = \sum_k h(k)z^{-k}. \quad (4.5.4)$$

Это непосредственно следует из линейности фильтра и из того, что z -преобразование единичного импульса равно 1 на всей плоскости z .

При нулевом начальном состоянии отклик фильтра с каузальной импульсной характеристикой $h(k)$ на произвольный входной сигнал $x(k)$ находится с помощью линейной дискретной свертки:

$$y(k) = \sum_{m=0}^k x(m)h(k-m). \quad (4.5.5)$$

В этом случае по теореме о свертке z -преобразования

$$Y(z) = X(z)H(z).$$

Если же $y(0) \neq 0$, то в (4.5.5) нужно добавить второе слагаемое как реакцию при нулевом входном воздействии.

Различают фильтры с конечной импульсной характеристикой, так называемые *КИХ-фильтры*, и фильтры с бесконечной импульсной характеристикой, так называемые *БИХ-фильтры*.

Пусть входной сигнал и импульсная характеристика являются финитными функциями и содержат N и M отсчетов соответственно. Тогда отклик фильтра будет представлять собой более протяженную функцию, состоящую из $N + M + 1$ отсчетов. Это приводит к тому, что при обработке сигналов необходимо резервировать дополнительно $M + 1$ ячеек памяти для хранения выходного сигнала.

Отметим еще одно обстоятельство. В теории z-преобразования сдвиг сигнала во времени понимается как параллельный перенос его отсчетов без нарушения порядка их следования, т. е. соседними всегда являются отсчеты, стоящие рядом. ЛИВДФ имеют характеристики, инвариантные относительно такого сдвига.

Условие устойчивости (необходимое и достаточное) заключается в том, что импульсная характеристика $h(k)$ является абсолютно суммируемой, т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty. \quad (4.5.6)$$

Если $x(k)$ ограничено по величине, т. е. $|x(k)| \leq X_{\max} < \infty$, то такое входное воздействие порождает ограниченный выходной сигнал. Действительно:

$$\begin{aligned} |y(k)| &= \left| \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(k-m) \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |x(m)||h(k-m)| \leq \\ &\leq X_{\max} \sum_{k=0}^{\infty} |h(k-m)| < \infty. \end{aligned}$$

По известной передаточной характеристике фильтра $H(z)$ можно определить его частотную характеристику:

$$H(\omega) = H[z = \exp(j\omega\Delta t)], \quad (4.5.7)$$

для чего достаточно в выражение для $H(z)$ подставить значение $z = \exp(j\omega\Delta t)$.

Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\omega) = |H[z = \exp(j\omega\Delta t)]|.$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \arg H[z = \exp(j\omega\Delta t)]. \quad (4.5.8)$$

Результат прохождения синусоидального воздействия $\sin \omega k \Delta t$, $k = 0, 1, 2, \dots$ через дискретный (цифровой) фильтр сводится к изменению амплитуды в $A(\omega)$ раз и к фазовому сдвигу $\varphi(\omega)$.

4.6. Примеры линейных дискретных фильтров

БИХ-фильтр

Система, показанная на рис. 4.6.1, включает сумматор, элемент задержки z^{-1} на один такт и цепь обратной связи с коэффициентом β . Это пример *рекурсивного* фильтра.

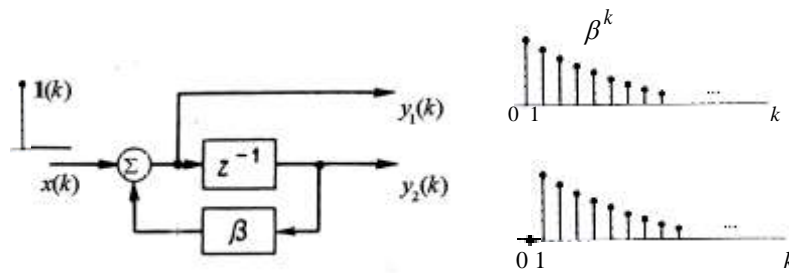


Рис. 4.6.1

Разностные уравнения фильтра для двух выходов имеют вид

$$y_1(k) = x(k) + \beta y_1(k-1),$$

$$y_2(k+1) = x(k) + \beta y_2(k).$$

Пусть на вход подан единичный импульс $x(k) = \mathbf{1}(k)$, тогда

$$y_1(0) = 1, y_1(1) = \beta, y_1(2) = \beta^2,$$

$$y_2(0) = 0, y_2(1) = 1, y_2(2) = \beta \text{ и т. д.}$$

Единичный импульс циркулирует в системе с временем задержки Δt , изменяясь при каждом обороте в β раз. На выходах устанавливаются собственные колебания (импульсные характеристики) бесконечной длительности. Поэтому этот рекурсивный фильтр называется *фильтром с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтр)*.

Соответствующие передаточные характеристики получаются применением z -преобразования к разностным уравнениям:

$$Y_1(z) = X(z) + \beta z^{-1} Y_1(z),$$

$$z Y_2(z) = X(z) + \beta Y_2(z).$$

Отсюда [Equation Chapter 4 Section 6](#)

$$H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{z}{z - \beta}, \quad (4.6.1)$$

$$H_2(z) = \frac{Y_2(z)}{X(z)} = \frac{1}{z - \beta} = \frac{z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}}.$$

Для обоих выходов передаточная функция имеет полюс в точке $z = \beta$. Функции $H_1(z)$ и $H_2(z)$ сходятся при $|z| > |\beta|$. Этот полюс внутри круга, если $|\beta| < 1$, т. е. в цепи обратной связи имеется затухание и система устойчива.

Замечание. Изменение знака в цепи обратной связи не приводит к неустойчивости системы, а лишь сдвигает полюс в точку $z = -\beta$. При $|\beta| < 1$ импульсная характеристика имеет вид затухающего знакопеременного колебания, полюс расположен внутри единичного круга и система устойчива.

Дискретный накопитель

При $\beta = 1$ фильтр на рис. 4.6.1 по выходу 1 представляет собой *дискретный накопитель*, которому соответствуют разностное уравнение

$$y_1(k) = x(k) + y_1(k-1) \quad (4.6.2)$$

и передаточная функция

$$H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

Этот фильтр неустойчивый, так как имеет полюс на единичной окружности. Он неработоспособен в том случае, когда входной сигнал действует неограниченно долго, т. к. в конце концов, выходной сигнал перестанет зависеть от входного. Однако он работоспособен и используется в тех случаях, когда входной сигнал действует в течение ограниченного интервала времени, например, когда $0 \leq k \leq N-1$, после чего следует сброс, т. е. восстанавливаются нулевые начальные условия.

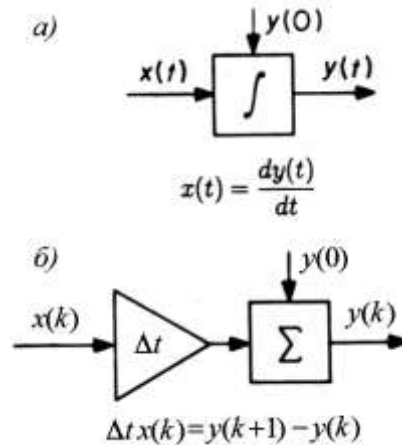


Рис. 4.6.2. Аналоговый интегратор (а) и дискретный накопитель (б)

При $\beta=1$ фильтр по выводу 2 представляет собой *дискретный накопитель* (рис. 4.6.2б), работающий по алгоритму Эйлера «вперёд», которому соответствует разностное уравнение

$$y_2(k+1) = x(k) + y_2(k), \quad y(0) = 0.$$

Дискретный накопитель эквивалентен аналоговому интегратору (рис. 4.6.2а), если принять $\Delta t = 1$ и $y(0) = 0$.

Простой дискретный дифференциатор

Поскольку единственная информация об $x(t)$ – его значения в дискретные моменты времени, то производная должна оцениваться по этим значениям:

$$\hat{x}'(k\Delta t) = \frac{1}{\Delta t} [x(k\Delta t) - x((k-1)\Delta t)].$$

Полагая $\Delta t = 1$, приходим к разностному уравнению простого дифференциатора:

$$y(k) = x(k) - x(k-1), \quad (4.6.3)$$

которому соответствует блок-схема на (рис. 4.6.3).

Передаточная функция дифференциатора:

$$H(z) = 1 - z^{-1}. \quad (4.6.4)$$

Фильтр нерекурсивный, не имеет полюсов, всегда устойчив.

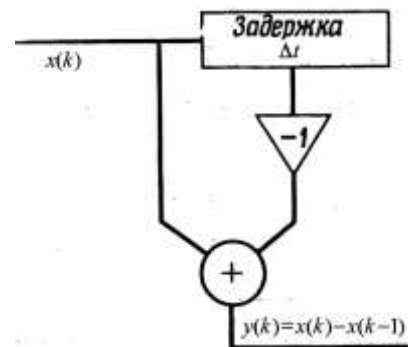


Рис. 4.6.3. Простой дифференциатор

Если $x(k) = \mathbf{1}(k)$, то $y(k) = h(k)$. Поэтому импульсная характеристика простого дифференциатора имеет вид:

$$h(k) = \mathbf{1}(k) - \mathbf{1}(k - 1), \quad (4.6.5)$$

Это пример КИХ-фильтра. Его АЧХ

$$|H(\omega)| = |1 - e^{-j\omega\Delta t}| = 2 \left| \sin \frac{\omega\Delta t}{2} \right|$$

изображена на рис. 4.6.4. Фазочастотная характеристика $\varphi(\omega) = -(\omega\Delta\tau / 2) + \pi / 2$.

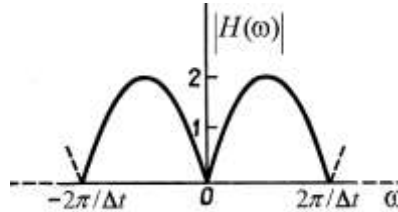


Рис. 4.6.4. АЧХ простого дифференциатора

Трансверсальный фильтр

Пусть в передаточной характеристике общего вида (4.5.3) знаменатель есть постоянная величина. Тогда

$$H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} h_m z^{-m}. \quad (4.6.6)$$

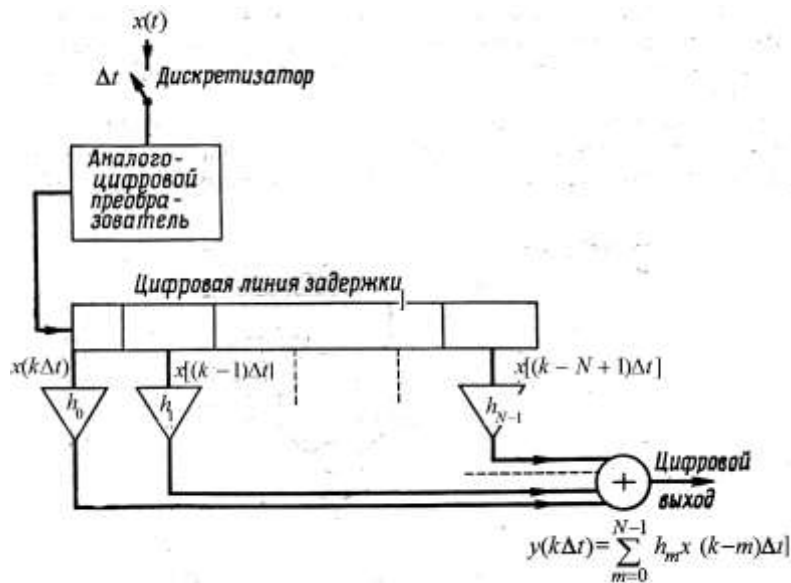


Рис. 4.6.5. Цифровой трансверсальный фильтр

Соответствующее разностное уравнение имеет вид

$$y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} h_m x(k - m), \quad (4.6.7)$$

т. е. фильтр имеет отклик, зависящий только от входных отсчетов (текущего и предыдущих) и является *нерекурсивным*. В соответствии с (4.6.7) h_m – отсчеты импульсной характеристики. Такой фильтр называется *трансверсальным*. Цифровая реализация линейного трансверсального фильтра

показана на рис. 4.6.5. Входной сигнал $x(t)$ предварительно дискретизируется по времени и квантуется по уровню. Последовательность отсчётов $x(k\Delta t)$ вырабатывается аналого-цифровым преобразователем (АЦП) (обычно в двоичном коде) и поступает на N -каскадную линию задержки (регистр сдвига), где числа сдвигаются на один каскад каждые Δt секунд под воздействием тактового импульса. С отводов регистра отсчёты $x(k-m)$, поступающие с отводов регистра, умножаются на весовые коэффициенты фильтра h_m и в соответствии с (4.6.7) формируются выходные отсчёты $y(k)$.

Следует отметить, что фильтр может обрабатывать бесконечный поток входных данных, при этом отклик $y(k)$ в момент $t = k\Delta t$ будет определяться содержимым его регистра в этот момент, т. е. отсчётами входного сигнала $x(k-N+1), x(k-N+2), \dots, x(k)$.

Замечание. При цифровой реализации погрешность квантования входных отсчётов $x(k\Delta t)$ и коэффициентов фильтра h_m , а также ошибки округления при умножении приводят к специфическим погрешностям при формировании отклика фильтра $y(k)$.

Задачи для самостоятельного решения к лекции 25 ноября 2019 г.

1. Пусть $x(k)$ – комплексная экспонента, т. е.

$$x(k) = \exp(p_0 k \Delta t), \quad k \geq 0, \quad p_0 = \beta_0 + j\omega_0.$$

Найти z-преобразование этой последовательности в форме (4.1.5).

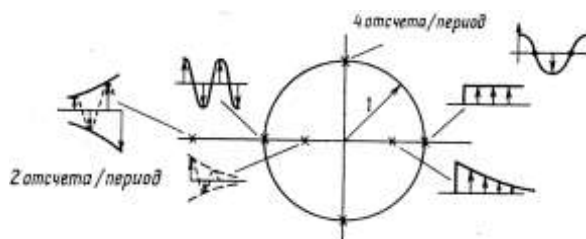
а) Найти полюс $X(z)$.

б) При каких условиях полюс будет внутри единичного круга?

в) Что показывает модуль полюса?

г) Зависит ли положение полюса от выбора шага дискретизации Δt ?

д) Объяснить связь положения полюсов с соответствующими экспонентами, которая иллюстрируется на рисунке.



2. Пусть $X(z) = 1 / (1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})$.

а) Найти обратное преобразование функции $X(z)$ методом разложения на простые дроби.

б) Определить последовательность $x(k)$, если

$$a = 0,5 + j0,5 \text{ и } b = a^*.$$

3. Пусть z-преобразование дискретного сигнала $x(k)$ имеет вид

$$X(z) = (z^2 + 2z + 1) / z.$$

Найти отсчётные значения этого сигнала.

Задачи для подготовки к курсовой работе №2

№1. Найти и изобразить по модулю ДВПФ и ДПФ 16 - точечных последовательностей

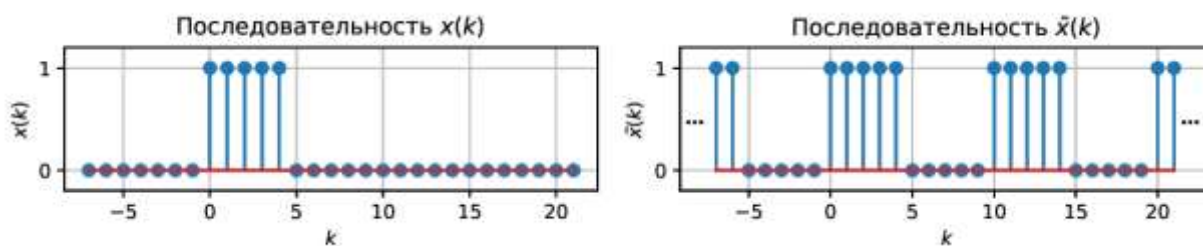
$$x(k) = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}(k-m) \text{ и } y(k) = x(k) \sin(2\pi k 5 / 16).$$

№2. Найти и изобразить дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ) периодической последовательности $x(k) = \exp\frac{j\pi k}{4}, -\infty < k < \infty$. Найти и изобразить по модулю ДПФ и ДВПФ

последовательности $y(k) = \sum_{m=0}^7 x(m)\mathbf{1}(k-m)$.

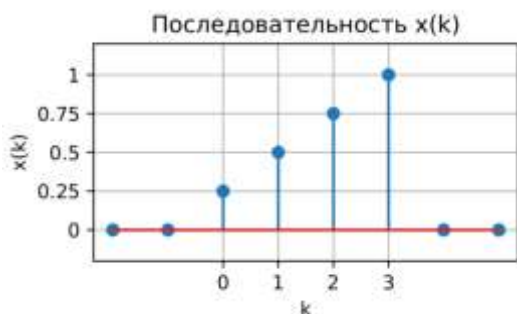
№3. Гармонический сигнал $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$, $f_0 = 35$ Гц, дискретизован с частотой $f_D = 140$ Гц. Найти и изобразить по модулю ДПФ и ДВПФ отрезка сигнала из восьми отсчетов.

№4. Изобразить модули коэффициентов ДПФ 5-точечной последовательности $x(k)$ и её периодического продолжения $\tilde{x}(k)$ с периодом 10.



№5. Пусть $X(n)$ - четырехточечное ДПФ последовательности $x(k)$, изображенной на графике.

Изобразить последовательность $y(k)$, ДПФ которой имеет вид $Y(n) = \exp\left(-j\frac{2\pi}{4}n\right)X(n)$.



№6. Последовательность $x(k)$ из 1000 элементов получена в результате дискретизации непрерывного сигнала $x(t)$ с частотой $f_D = 5120$ Гц. Обозначим через $X(n)$ 1024-точечное ДПФ последовательности $x(k)$. Определить расстояние (в Гц) между непрерывными частотами, которые соответствуют соседним отсчетам ДПФ.

№7. Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой $2f_B = 10$ кГц (где f_B - верхняя граничная частота) дискретизируется в соответствии с теоремой отсчетов. В результате получается последовательность $x(k)$. Обозначим через $X(n)$ 1000-точечное ДПФ последовательности $x(k)$. Каким частотам (в Гц) в спектре исходного сигнала $x(t)$ соответствуют индексы $n=100$ и $n=850$ в последовательности $X(n)$? Каким частотам (в Гц) в ДВПФ последовательности $x(k)$ соответствуют эти отсчеты ДПФ?

№8. Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой $2f_B = 10$ кГц дискретизируется в соответствии с шагом Δt (с частотой дискретизации $f_B = 1/\Delta t$). В результате получается последовательность $x(k) = x(k\Delta t)$. Вычисляется N -точечное ДПФ, где $N = 2^m$, m – натуральное число. Определить минимальное значение N и допустимые пределы частоты дискретизации $f_{\min} < f_D < f_{\max}$, при которых анализ возможен, а расстояние между отсчетами ДПФ будет меньше 5 Гц.

№9. Сформулировать, в чем для N - точечной последовательности заключается связь между ДВПФ и ДПФ в точках $\nu = n/N$. Привести последовательность действий при вычисления ДВПФ в L точках на основе ДПФ при $L > N$.

№10. Получить для N - точечной последовательности формулу восстановления ДВПФ $X(\nu)$ по коэффициентам ДПФ $X(n)$ в точках $\nu \neq n/N$.