

## Глава 2. Дискретизация аналоговых сигналов

Как уже отмечалось в первой главе, *дискретизация* – это переход от непрерывного сигнала  $x(t)$  к последовательности чисел – коэффициентам разложения сигнала по какому-либо ортогональному базису. С точки зрения организации обработки наиболее удобным способом дискретизации является представление сигналов в виде выборок их значений (отсчётов) в отдельных эквидистантно расположенных точках. Поэтому в качестве базисов дискретизации чаще всего используются сдвиговые базисные функции (функции отсчётов и прямоугольные функции), рассмотренные в п. 1.6.

### 2.1. Функция дискретизации.

#### Модель дискретизованного сигнала

В этой главе рассматриваются дискретные представления сигналов, основанные на использовании периодических моментов дискретизации. В таком случае процесс дискретизации эквивалентен амплитудной модуляции последовательности импульсов и иллюстрируется на рис. 2.1.1.

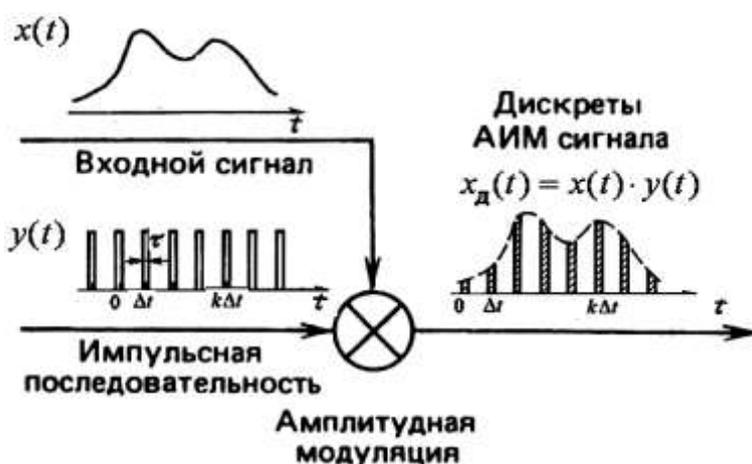


Рис. 2.1.1. Дискретизация как амплитудно-импульсная модуляция

В пределе дискретизатор можно рассматривать как периодически действующий прерыватель. При этом длительность импульсов  $\tau$  практически должна быть исчезающе мала по сравнению с периодом дискретизации  $\Delta t$ .

Периодическую последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой  $A$ , длительностью  $\tau$  и периодом  $\Delta t$  представим в виде ряда Фурье по комплексным экспоненциальным функциям :

$$\varphi_n(t) = e^{jn\frac{2\pi}{\Delta t}t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A \Pi_{\tau}(t - k\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{\Delta t}t},$$

где коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{A}{\|\varphi_n(t)\|^2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \Pi_{\tau}(t) e^{-jn\frac{2\pi}{\Delta t}t} dt = \frac{A\tau}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{\Delta t}\tau}{n\frac{\pi}{\Delta t}\tau}.$$

В результате функция дискретизации представляется в виде

$$y(t) = \frac{A\tau}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{\Delta t} \tau}{n \frac{\pi}{\Delta t} \tau} e^{jn \frac{2\pi}{\Delta t} t}.$$

Устремляя  $\tau$  к нулю и предполагая, что произведение  $A\tau$  остаётся постоянным, например,  $(A\tau = \Delta t)_{\tau \rightarrow 0}$ , получаем

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} [y(t)] = D_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn \frac{2\pi}{\Delta t} t}.$$

Это есть ряд Фурье для периодической последовательности дельта-функций, следующих с периодом  $\Delta t$ , т. е.

$$D_{\Delta t}(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t). \quad (2.1.1)$$

Эту функцию мы будем называть *функцией идеальной дискретизации*. Дискретизованный сигнал можно рассматривать как результат модуляции последовательности дельта-функций  $D_{\Delta t}(t)$  функцией  $x(t)$ :

$$x_d(t) = x(t) \cdot D_{\Delta t}(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t), \quad (2.1.2)$$

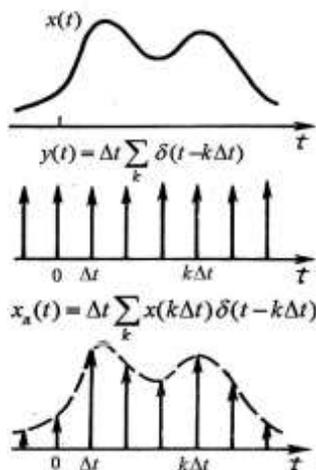


Рис. 2.1.2

что иллюстрируется на рис. 2.1.2. При таком определении функции дискретизации размерности левой и правой части (2.1.2) совпадают.

Рассмотрим ещё одну трактовку процесса дискретизации. Идеальный способ взятия отсчётов сигнала  $x(t)$  основывается на фильтрующем свойстве дельта-функции:

$$x(k\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - k\Delta t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(k\Delta t - t) dt. \quad (2.1.3)$$

Последний интеграл есть интеграл свёртки. Отсюда вытекает, что устройством, осуществляющим измерение мгновенных значений  $x(k\Delta t)$ , является дискретизатор (фильтр) с бесконечно короткой импульсной характеристикой. Ясно, что в реальных дискретизаторах измерение величины  $x(k\Delta t)$  будет тем точнее, чем короче их импульсная характеристика.

Математическую модель (2.1.2) дискретного сигнала  $x_d(t)$  можно получить и другим способом. Возьмём формулу динамического представления сигнала

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau. \quad (2.1.4)$$

Поскольку дискретный сигнал определён лишь в точках  $t_k = k\Delta t$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), интегрирование в (2.1.4) следует заменить суммированием по индексу  $k$ , а  $d\tau$  на  $\Delta t$ , тогда

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \cdot \delta(t - k\Delta t) = \\ &= x(t) \cdot \left[ \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \right] = x(t) \cdot D_{\Delta t}(t). \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Таким образом, операция дискретизации, т. е. переход от аналогового сигнала  $x(t)$  к дискретному  $x_d(t)$  осуществляется умножением  $x(t)$  на функцию дискретизации:

$$D_{\Delta t}(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t).$$

Эту периодическую последовательность дельта-функций, следующих с периодом  $\Delta t$ , называют ещё *гребёнкой Дирака*. В соответствии с (2.1.2) и (2.1.5) дискретизованный сигнал представляется бесконечно узкими импульсами с площадями  $\Delta t \cdot x(k\Delta t)$ . Эти импульсы расположены в равноотстоящих точках  $t_k = k\Delta t$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , как показано на рис. 2.1.2.

## 2.2. Спектр дискретизованного сигнала

Найдём сначала спектр функции дискретизации (2.1.1). Периодическую последовательность дельта-функций можно представить рядом Фурье:

$$D_{\Delta t}(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{\Delta t} nt},$$

где коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) e^{-j\frac{2\pi}{\Delta t} nt} dt = \frac{1}{\Delta t}$$

одинаковы для всех  $n$ . Поэтому

$$D_{\Delta t}(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\frac{n}{\Delta t}t}. \quad (2.2.1)$$

Перейдем в частотную область и учтем, что  $e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0)$ . Тогда для спектра функции дискретизации получаем

$$D_{f_d}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_d). \quad (2.2.2)$$

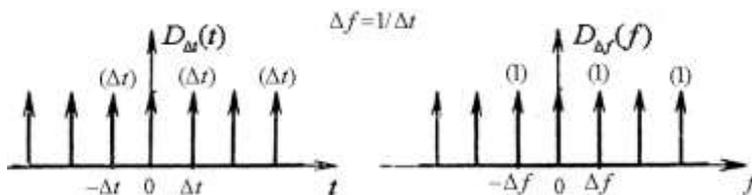


Рис. 2.2.1. Функция дискретизации и её спектр

Здесь  $f_d = \Delta f = 1/\Delta t$  – частота дискретизации. Таким образом, спектр функции дискретизации представляется периодической последовательностью дельта-функций, период следования которых на частотной оси равен частоте дискретизации. Соответствие

$$D_{\Delta t}(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \Leftrightarrow D_{f_d}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_d) \quad (2.2.3)$$

иллюстрируется на рис. 2.2.1.

Найдём теперь спектр дискретизованного сигнала  $x_d(t)$ . Пусть  $X(f)$  – спектр сигнала  $x(t)$ . Произведению функций в правой части (2.1.5) соответствует свертка их Фурье-образов в спектральной области, поэтому

$$X_d(f) = X(f) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(f - \nu) \delta(\nu - n f_d) d\nu.$$

С учётом фильтрующего свойства дельта-функции получаем

$$X_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_d) = X(f) + \sum_{n=1}^{\infty} X(f \pm n f_d). \quad (2.2.4)$$

Таким образом, дискретизация аналогового сигнала по времени с шагом  $\Delta t$  приводит к периодическому повторению его спектра по оси частот с периодом, равным частоте дискретизации  $f_d = \Delta f = 1/\Delta t$ .

На рис. 2.2.2 изображён случай, когда спектр аналогового сигнала является финитной функцией и частота дискретизации выбрана так, что частичные спектры не перекрываются.

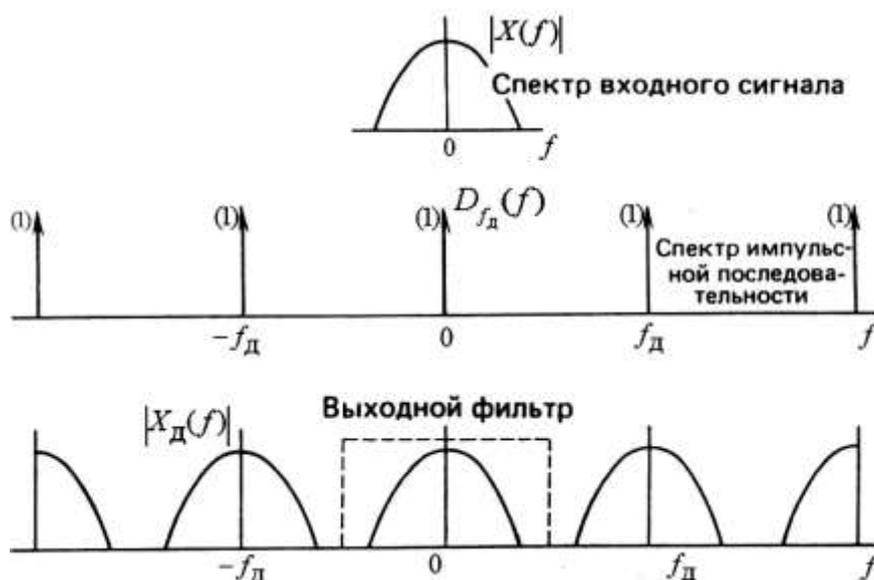


Рис. 2.2.2. Спектр дискретизованного сигнала

*При этом любой из частичных спектров является неискажённой копией исходного спектра, поэтому, выделив с помощью фильтра один из них (например, при  $n=0$ ), можно по нему точно восстановить сигнал. Возможность такого восстановления подтверждается теоремой Котельникова.*

### 2.3. Теорема Котельникова

В 1933 году В.А. Котельников доказал теорему, которая имеет фундаментальное значение в физике и технике. В соответствии с этой теоремой аналоговый сигнал  $x(t)$  при определённых условиях однозначно представляется последовательностью своих отсчётов, взятых через равные промежутки времени. В зарубежной литературе эта теорема называется *теоремой отсчётов*.

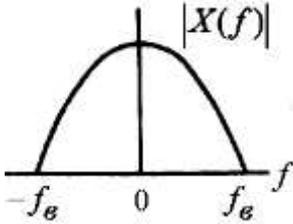


Рис. 2.3.1

#### Сигналы с финитным спектром

Рассмотрим сначала сигналы, которые характеризуются тем, что их ПФ существует на всём интервале частот  $(-\infty, \infty)$ , но отлично от нуля только на конечном интервале  $[-f_g, f_g]$  (рис. 2.3.1).

Для сигнала  $x(t)$  с финитным спектром  $X(f)$  запишем представление по функциям отсчетов (1.6.1):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{\sin 2\pi f_g(t - k\Delta t)}{2\pi f_g(t - k\Delta t)}, \quad (0.0.1)$$

где

$$c_k = \frac{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_k)}{(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin 2\pi f_g(t - k\Delta t)}{2\pi f_g(t - k\Delta t)} dt \quad (0.0.2)$$

есть коэффициенты Фурье и  $\Delta t = 1/2f_g$ . Спектр функции отсчётов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) e^{-j2\pi f t} dt = \Pi_{2f_g}(f) \exp(-j2\pi f k\Delta t)$$

имеет фазовый множитель из-за сдвига по времени на  $k\Delta t$ . Модуль этого спектра  $\Pi_{2f_g}(f)$  является прямоугольной функцией с единичной площадью. С учётом обобщённого равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df \quad (0.0.3)$$

выражение для коэффициента  $c_k$  можем записать в виде

$$c_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \Pi_{2f_g}(f) e^{j2\pi f k\Delta t} df.$$

Произведение под интегралом

$$X(f) \Pi_{2f_g}(f) = X(f) \frac{1}{2f_g} = X(f) \Delta t,$$

поэтому

$$c_k = x(k\Delta t). \quad (0.0.4)$$

Отсюда вывод: если сигнал имеет спектр, ограниченный интервалом  $[-f_g, f_g]$  и шаг дискретизации  $\Delta t = 1/2f_g$ , то коэффициенты Фурье  $c_k$  разложения сигнала по функциям отсчётов  $\varphi_k(t)$  являются выборками сигнала  $x(k\Delta t)$  и для  $x(t)$  имеет место представление рядом Котельникова:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_g(t - k\Delta t)}{2\pi f_g(t - k\Delta t)}. \quad (0.0.5)$$

Справедливость точного равенства (0.0.5) для сигналов с финитным спектром по существу представляет собой формулировку теоремы Котельникова и вытекает из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \varphi_k(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t-\tau) \delta(\tau-k\Delta t) d\tau = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \varphi_0(t) \otimes [\Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t-k\Delta t)]. \end{aligned} \quad (0.0.6)$$

Свертку (0.0.6) можно интерпретировать как отклик идеального фильтра нижних частот с импульсной характеристикой

$$h(t) = \frac{1}{\Delta t} \varphi_0(t) = 2f_g \frac{\sin 2\pi f_g t}{2\pi f_g t},$$

на вход которого поступает взвешенная последовательность дельта-импульсов с площадями  $\Delta t \cdot x(k\Delta t)$ .

Свертке (0.0.6) во времени соответствует произведение соответствующих Фурье-образов

$$2f_g \Pi_{2f_g}(f) X_d(f) = 2f_g \Pi_{2f_g}(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{n}{\Delta t}) = X(f).$$

Отсюда, если взять обратное преобразование Фурье, следует (0.0.5). Таким образом, приведённые выше соотношения иллюстрируют возможность точного восстановления непрерывного сигнала  $x(t)$  по его дискретным отсчётам.

*Замечание.* Важно отметить, что любой ряд Котельникова вида (2.3.5) представляет функцию с финитным спектром.

Теорема Котельникова относится к числу фундаментальных результатов и широко используется в теории и практике обработки сигналов. Так, например, чтобы передать по каналу связи непрерывное сообщение  $x(t)$  с финитным спектром, можно поступить следующим образом:

- взять отсчеты  $x(k\Delta t)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ;
- передать величины этих отсчетов;
- на приемном конце сформировать короткие импульсы с площадями  $\Delta t \cdot x(k\Delta t)$ ;
- восстановить сообщение с помощью фильтра нижних частот с полосой  $[-f_g, f_g]$  и постоянным в пределах этой полосы коэффициентом передачи, подавая на вход фильтра сформированные короткие импульсы.

### Сигналы с нефинитным спектром

Реально, любой сигнал наблюдается в течение конечного интервала времени  $T$ . Спектр такого сигнала строго не является финитной функцией, т. е. будет неограничен по протяженности (рис. 2.3.2а). В этом случае выбор верхней граничной частоты  $f_g$  является условным. Дискретизованный с некоторым шагом  $\Delta t = 1/2f_g$  в соответствии с (2.2.2) будет иметь спектр  $X_d(f)$ , изображенный на рис. 2.3.2б. Таким образом, при дискретизации сигнала с неограниченным спектром периодическое повторение спектра, вызванное дискретизацией, будет сопровождаться *эффектом наложения* ("aliasing") частичных спектров своими "хвостами". В силу неограниченной протяженности исходного спектра этот эффект принципиально неустраним при любом  $\Delta t$  (он может быть только ослаблен выбором малого  $\Delta t$ ).

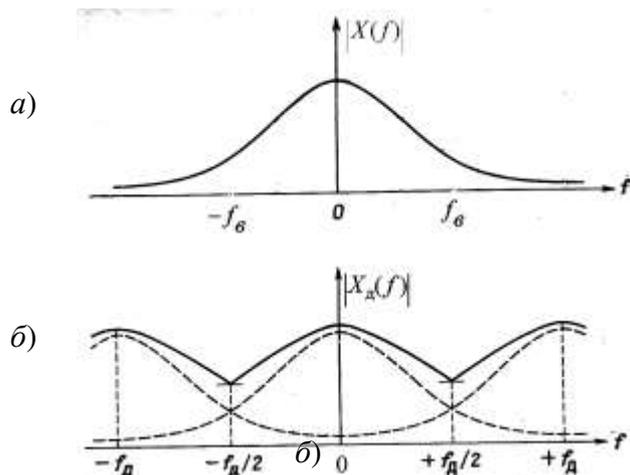


Рис. 2.3.2

Рассмотрим один период спектра  $X_d(f)$  в полосе  $[-f_c, f_c]$ , где  $f_c = f_d/2 = 1/2\Delta t$  – частота Найквиста. Он будет отличаться от исходного  $X(f)$ , во-первых, тем, что не содержит спектральных составляющих выше частоты  $f_c = f_d/2$ , а во-вторых, тем, что содержит "лишние" составляющие за счёт наложения.

Пусть  $T = N\Delta t$ . Тогда восстановленный по отсчетам сигнал

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \sum_{k=-N/2}^{N/2} x(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_c(t-k\Delta t)}{2\pi f_c(t-k\Delta t)} = \\ &= \sum_{k=-N/2}^{N/2} x(k\Delta t) \frac{\sin \pi f_d(t-k\Delta t)}{\pi f_d(t-k\Delta t)}\end{aligned}$$

по указанным двум причинам будет отличаться от исходного  $x(t)$ .

Наилучшим способом дискретизации сигнала с нефинитным спектром является представление с помощью коэффициентов Фурье:

$$c_k = \frac{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_k)}{(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin \pi f_d(t-k\Delta t)}{\pi f_d(t-k\Delta t)} dt, \quad (0.0.7)$$

которые уже не равны отсчетам  $x(k\Delta t)$ . Действительно, применяя к (0.0.7) равенство Парсеваля (0.0.3), будем иметь

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \Pi_{2f_c}(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df = \\ &= \int_{-f_c}^{f_c} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df = x_1(k\Delta t),\end{aligned}$$

т. е. коэффициенты Фурье  $c_k$  равны выборкам сигнала  $x_1(t)$ , имеющего финитный спектр

$$X_1(f) = \begin{cases} X(f) & \text{при } f \in [-f_c, f_c], \\ 0 & \text{при других } f. \end{cases}$$

Восстановленный по этим коэффициентам сигнал

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{\sin \pi f_d(t-k\Delta t)}{\pi f_d(t-k\Delta t)} \quad (0.0.8)$$

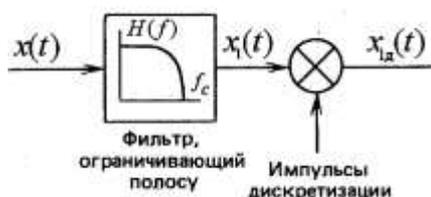
также будет отличаться от исходного  $x(t)$ . Среднеквадратическая ошибка определяется энергией отброшенных "хвостов" спектра с частотами  $|f| > f_c$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\min}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f) - X_1(f)|^2 df \quad \text{или} \\ \varepsilon_{\min}^2 &= \int_{-\infty}^{-f_c} |X(f)|^2 df + \int_{f_c}^{\infty} |X(f)|^2 df. \end{aligned} \quad (0.0.9)$$

Если вместо  $c_k$  в (0.0.8) взять отсчёты  $x(k\Delta t)$ , то к ошибке (0.0.9) добавится ошибка за счет наложения частичных спектров:

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_{\min}^2 + \varepsilon_{\text{доп}}^2, \quad \text{где}$$

$$\varepsilon_{\text{доп}}^2 = \int_{-f_c}^0 \left| \sum_{|n|=1}^{\infty} X(f + nf_d) \right|^2 df + \int_0^{f_c} \left| \sum_{|n|=1}^{\infty} X(f + nf_d) \right|^2 df \quad (0.0.10)$$



зависит от интенсивности компонент спектра при  $|f| > f_c$ . Поэтому для ослабления эффекта наложения сигнал перед дискретизацией пропускают через фильтр нижних частот с целью подавления высокочастотных составляющих сигнала выше частоты  $f_c = f_d / 2 = 1 / 2\Delta t$ , чтобы не допустить их свертывание в информационную часть спектра  $[-f_c, f_c]$ .

Можно перечислить основные причины, по которым восстановленный в соответствии с (0.0.5) сигнал будет отличаться от исходного:

- спектры реальных сигналов ограничены по частоте приближенно;
- невозможно измерить отсчёты сигнала за бесконечно малый промежуток времени;
- отличие реальных фильтров восстановления от идеального фильтра нижних частот;
- отличие импульсов отсчетов от  $\delta$ -функций;
- конечное число отсчетов.

## 2.4. Эффект наложения спектров («aliasing») при дискретизации синусоидальных сигналов

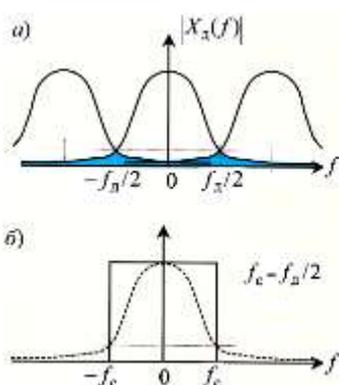


Рис. 2.4.1

Дискретизация сигнала  $x(t)$  по времени с шагом  $\Delta t$  приводит к периодическому повторению исходного спектра  $X(f)$  с периодом, равным частоте дискретизации  $f_d = 1 / \Delta t$ . Полезная информация содержится в полосе  $[-f_d / 2, f_d / 2]$ . Если не принять специальных мер, возникает эффект наложения, в результате которого все частоты в спектре сигнала, превышающие половинную частоту дискретизации, как бы отражаются от этой частоты и переносятся на более низкие частоты, искажая исходный спектр (рис. 2.4.1а). Для устранения этого эффекта сигнал перед дискретизацией предварительно пропускают через низкочастотный фильтр, частота среза которого равна  $f_c = 1 / 2\Delta t$ .

Частота  $f_d / 2$  в зарубежной литературе называется частотой Найквиста.

При дискретизации синусоидальных сигналов необходимо следить за тем, чтобы частоты синусоид не превосходили половину частоты дискретизации, как того требует теорема Котельникова. Несоблюдение этого условия приводит к парадоксальным результатам, например, при наблюдении восстановленных синусоид в цифровом осциллографе.

Пусть сигнал  $x(t) = \sin \pi f_0 t$  дискретизируется с частотой  $f_d$  отсчетов в секунду, т. е. через равные интервалы времени  $\Delta t = 1 / f_d$ . Для последовательности отсчетов можем записать

$$x(k) = \sin 2\pi f_0 k \Delta t = \sin(2\pi f_0 k \Delta t + 2\pi m) = \sin 2\pi(f_0 + m / k \Delta t)k \Delta t.$$

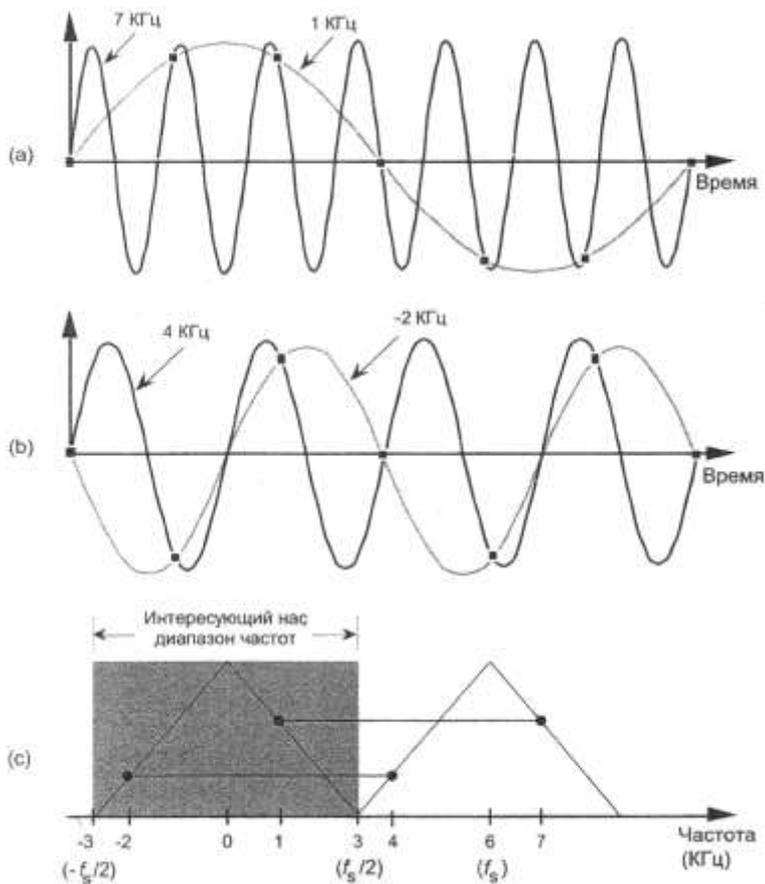
Если выберем  $m$  кратным  $k$ ,  $m = nk$ , мы можем заменить отношение  $m / k$  целочисленной переменной  $n$ , так что

$$x(k) = \sin 2\pi f_0 k \Delta t = \sin 2\pi(f_0 + n / \Delta t)k \Delta t = \sin 2\pi(f_0 + n f_d)k \Delta t. \quad (2.4.1)$$

Следовательно, частоты  $f_0$  и  $f_0 + n f_d$  дают одинаковый результат. Это выражение показывает, что последовательность цифровых отсчетов  $x(k)$ , представляющая синусоиду с частотой  $f_0$  Гц, точно так же представляет синусоиды с другими частотами  $f_0 + n f_d$ . Это одно из важнейших соотношений в области цифровой обработки сигналов.

*Вывод.* При дискретизации с частотой  $f_d$  отсчетов в секунду мы не можем различить дискретизованные значения синусоиды частотой  $f_0$  Гц и синусоиды частотой  $(f_0 + n f_d)$  Гц, если  $n$  – любое положительное или отрицательное целое число.

Рисунок 2.4.2. иллюстрирует эффект наложения спектров для синусоидальных сигналов.



$$f_s = f_d = 6 \text{ кГц}$$

Рис. 2.4.2

На рисунке 2.4.2а рассмотрен процесс дискретизации синусоиды частотой 7 кГц с частотой дискретизации 6 кГц. Значения отсчетов не изменились бы вместо нашей синусоиды мы дискретизовали синусоиду частотой 1 кГц. В этом примере параметры в (2.4.1) равны:  $f_0 = 7$  кГц,  $f_d = 6$  кГц и  $n = -1$ , так что  $f_0 + n f_d = [7 + (-1)6] = 1$  кГц.

На рисунке 2.4.2б рассмотрен процесс дискретизации синусоиды частотой 4 кГц с частотой дискретизации 6 кГц. И в этом случае  $f_0 > f_d / 2$ , т.е. условия теоремы Котельникова нарушены. Оба случая представлены на рисунке 2.4.2с.

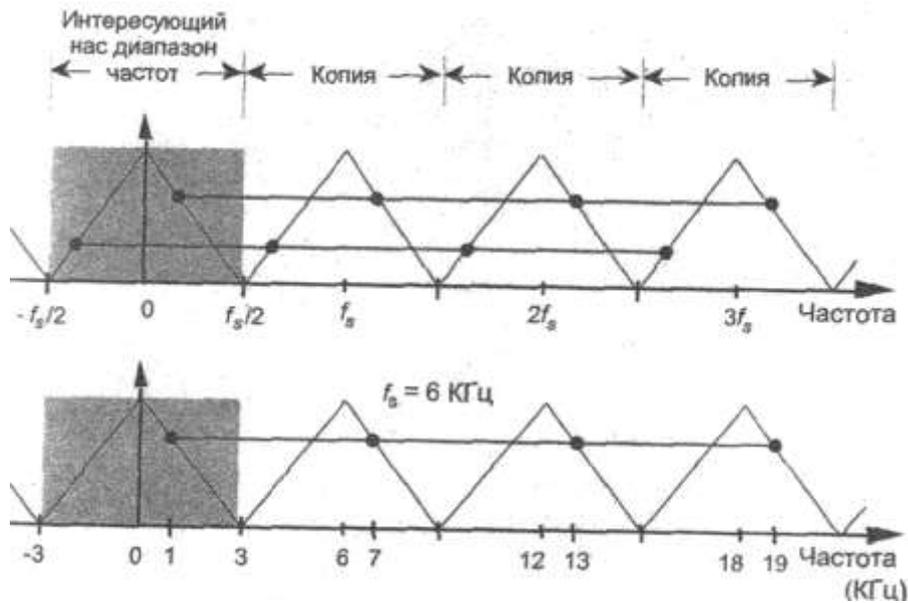


Рис. 2.4.3. Зубчатая структура: наложение синусоиды частотой 7 кГц на 1 кГц, 13 кГц, 19 кГц и т.д.

## 2.5. Дискретизация в частотной области

Реально все сигналы наблюдаются в течение конечного интервала времени, например,  $[-T, T]$ . Поэтому можно считать, что  $x(t)$  является финитной функцией. Спектр такого сигнала имеет бесконечную протяжённость и записывается в виде

$$X(f) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Для периодического продолжения  $x(t)$  с периодом  $2T$  (без наложения) справедливо представление рядом Фурье:

$$x_n(t) = \sum_n c_n e^{j2\pi n \Delta f t},$$

где  $\Delta f = 1/2T$  и коэффициенты Фурье

$$c_n = (1/2T) \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi n \Delta f t} dt = \Delta f X(n \Delta f).$$

Для спектральной функции можем записать

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-T}^T \left[ \sum_n \Delta f X(n \Delta f) e^{j2\pi n \Delta f t} \right] e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \Delta f \sum_n X(n \Delta f) \int_{-T}^T e^{j2\pi(n \Delta f - f)t} dt. \end{aligned}$$

Интеграл в этом выражении легко находится

$$\int_{-T}^T e^{j2\pi(n\Delta f - f)t} dt = \frac{1}{j2\pi(n\Delta f - f)} e^{j2\pi(n\Delta f - f)t} \Big|_{-T}^T = \frac{2 \sin 2\pi T(n\Delta f - f)}{2\pi(n\Delta f - f)}.$$

Для  $X(f)$  окончательно получаем

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta f) \frac{\sin 2\pi T(f - n\Delta f)}{2\pi T(f - n\Delta f)}; \Delta f = 1/2T. \quad (2.5.1)$$

Это интерполяционная формула Котельникова (теорема отсчётов) в частотной области. Функция  $X(f)$  на любой частоте  $f$  однозначно представляется последовательностью своих отсчётов, взятых через равные интервалы  $\Delta f = 1/2T$ .

Дискретизация спектральной функции с шагом  $\Delta f = 1/2T$  приводит к периодическому повторению сигнала по оси времени с периодом  $2T$ . При этом эффекта наложения отдельных периодов друг на друга не будет, поскольку шаг дискретизации по частоте выбран в соответствии с теоремой отсчётов в спектральной области. Выделив один из периодов, например, при  $t \in [-T, T]$ , можно точно восстановить спектральную функцию  $X(f)$ , взяв ПФ[ $x(t)$ ].

### Дискретизация энергетического спектра

Все физические сигналы обладают конечной энергией, которая может рассматриваться как во временной, так и в спектральной областях, при этом справедливо равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df.$$

Входящая в правый интеграл функция  $|X(f)|^2$  имеет размерность спектральной плотности энергии и называется часто *энергетическим спектром*.

Пусть сигнал равен нулю вне интервала  $[-T, T]$ . В соответствии с теоремой отсчётов определим шаг дискретизации функции  $|X(f)|^2$ . По теореме о свёртке преобразования Фурье

$$|X(f)|^2 = X(f) \cdot X^*(f) \Leftrightarrow x(t) \otimes x(-t).$$

Поскольку сигнал  $x(t)$  имеет длительность  $2T$ , то свёртка  $x(t) \otimes x(-t)$  имеет длительность  $4T$ .

Поэтому шаг дискретизации функции  $|X(f)|^2$  должен удовлетворять неравенству  $\Delta f \leq 1/4T$ .

### База сигнала

Будем считать, что сигнал  $x(t)$  длительностью  $T$  дискретизован по времени с шагом  $\Delta t = T/N$ . Шаг дискретизации по частоте в соответствии с теоремой Котельникова в частотной области должен быть равным

$$\Delta f = 1/T = 1/N\Delta t = f_d / N.$$

По теореме отсчетов  $f_d = 2f_g$ , где  $f_g$  – верхняя граница спектра. Ясно, что для сигналов конечной длительности значение  $f_g$  достаточно условное, при этом часто предполагается, что "хвостами" спектра выше  $f_g$  можно пренебречь. Поэтому число точек дискретизации спектра  $X(f)$  равно

$$2f_g / \Delta f = 2f_g \cdot N / f_d = N.$$

Таким образом, сигнал  $x(t)$ , имеющий конечную длительность  $T$  и спектральную функцию  $X(f)$ , приближенно ограниченную интервалом  $[-f_g, f_g]$ , и по времени, и по частоте будет определяться

$$N = T / \Delta t = 2f_g T \quad (2.5.2)$$

своими мгновенными значениями. Клод Шеннон предложил интерпретировать сигнал с конечными длительностью и полосой как точку в  $N$ -мерном евклидовом пространстве. Число  $N = 2f_g T$  является размерностью пространства сигналов, ограниченных по длительности и по частоте, и называется *базой сигнала*.

Для  $T$ -периодического сигнала имеет место представление рядом Фурье:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - mT) \approx \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} c_n e^{j2\pi n \Delta f t},$$

где коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n \Delta f t} dt = \Delta f X(n \Delta f),$$

а  $\Delta f = 1/T$  – расстояние между гармониками в спектре, равное шагу дискретизации по частоте.

Эти соответствия можно выразить следующими словами: *дискретизация сигнала по времени приводит к периодическому повторению спектра, и, наоборот, дискретизация спектра приводит к периодическому повторению сигнала.*

Сигналы, дискретные по времени и по частоте, будут рассмотрены в разделе «Дискретное преобразование Фурье».

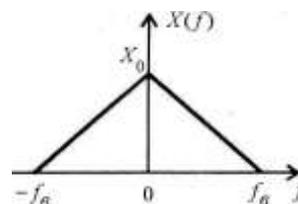
### Задачи к лекции 26 февраля 2019 г.

1. Гармонический сигнал  $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$ ,  $f_0 = 500$  кГц дискретизован с частотой  $f_d = 2$  МГц. Изобразить как функцию нормированной частоты  $\nu = f / f_d$  в диапазоне  $|\nu| \leq 2$

- модуль спектра исходного сигнала;
- модуль спектра дискретизованного сигнала;
- модуль спектра последовательности  $y(k) = x(k) \cdot (-1)^k$ ;
- модуль спектра последовательности  $z(k) = x(k) \cdot 2 \cos(k\pi / 2)$ .

2. Сигнал  $x(t)$  имеет финитный спектр треугольного вида. Определить коэффициенты ряда Котельникова для этого сигнала, полагая, что

$$\Delta t = \frac{1}{2f_g}.$$



3. Основываясь на теореме отсчетов, рассчитать полосу частот, необходимую для передачи черно-белого телевизионного сигнала, если принять, что

- разрешающая способность телевизионного изображения 500 строк;
- число элементов в строке 650;
- скорость передачи 25 кадров в секунду;
- яркость каждой точки передается амплитудой видеосигнала.

4. Сигнал  $x(t)$  имеет спектр, ограниченный полосой  $|f| \leq f_g$ . Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \Delta t), \quad \Delta t = \frac{1}{2f_g}.$$