Конструирование оконных функций (продолжение п. 3.4)

Выбор оконной функции важен для получения оценок параметров исследуемого сигнала при наличии флуктуационных помех. При обнаружении сигналов с большим динамическим диапазоном ДВПФ оконной функции должно иметь узкий главный лепесток и низкий уровень боковых лепестков. Поскольку универсальных окон, удовлетворяющим различным задачам спектрального анализа, не существует, актуальным является конструирование окон, оптимальных для решаемой задачи. Конструирование оконной функции может выполняться различными способами:

- использованием элементарных функций для аппроксимации отдельных участков окна;
- суммированием, перемножением или свёрткой нескольких функций;
- оптимизацией параметров оконной функции.

Многие практические оконные функции могут быть представлены с помощью обобщённого косинусного окна [1]

$$w_{\text{ст}}(k)=\sum_{r=0}^{R}a_r\cos\frac{2\pi}{N}rk,\quad -N/2\le k\le N/2. \tag{3.4.10}$$

Представляя косинус суммой двух экспонент и используя теорему смещения, находим соответствующее спектральное окно:

$$W_{\text{ст}}(\nu)=\sum_{r=0}^{R}0,5a_r\left[\mathrm{Q}_0\left(\nu-\frac{r}{N}\right)+\mathrm{Q}_0\left(\nu+\frac{r}{N}\right)\right], \tag{3.4.11}$$

где

$$\mathrm{Q}_0(\nu)=\frac{\sin\pi\nu(N+1)}{\sin\pi\nu}-\text{ ядро Дирихле} \tag{3.4.12}$$

В качестве примера на рис. 3.4.2 изображено спектральное окно Ханна и три составляющие его компоненты при использовании лишь двух коэффициентов $a_0=a_1=0,5$.

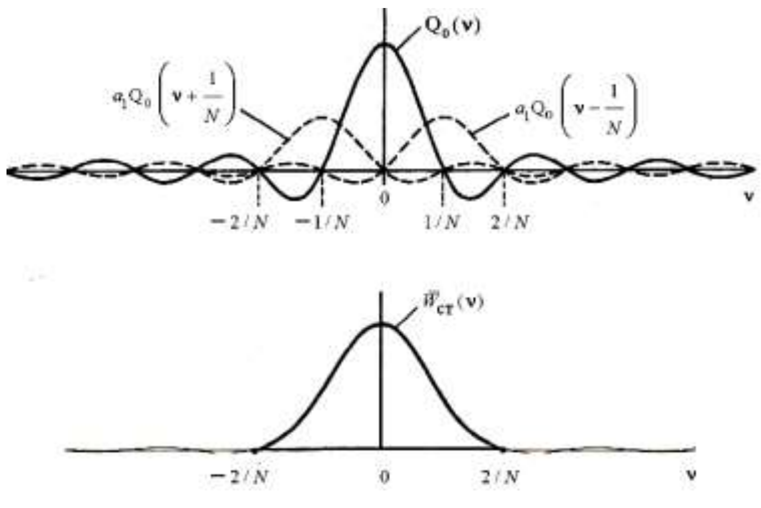


Рис. 3.4.2. Спектральное окно (4.11) при $R=1$ и $a_0=a_1=0,5$

Как видно из рисунка, колебания спектрального окна $W_{\text{ст}}(\nu)$ вне интервала $[-2/N,\ 2/N]$ существенно меньше колебаний каждой из его составляющих. Это объясняется тем, что боковые лепестки смещённых ядер находятся в противофазе с боковыми лепестками центрального ядра Дирихле, что приводит к их значительной компенсации.

Соответствующие (3.4.10) и (3.4.11) временное и спектральное окна для ДПФ будут:

$$w(k)=\frac{1+2\sum_{l=1}^{L}(-1)^l a_l\cos\frac{2\pi}{N}lk}{1+2\sum_{l=1}^{L}a_l},\quad 0\le k\le N-1; \tag{3.4.13}$$

$$\bar{W}(\nu)=\mathrm{Q}(\nu)+\sum_{l=1}^{L}(-1)^l a_l\left[\mathrm{Q}\left(\nu-\frac{l}{N}\right)+\mathrm{Q}\left(\nu+\frac{l}{N}\right)\right]. \tag{3.4.14}$$

где

$$\mathrm{Q}(\nu)=e^{-j\pi(N-1)\nu}\ \frac{\sin\pi\nu(N+1)}{\sin\pi\nu}. \tag{3.4.15}$$

Заметим, что коэффициенты при косинусах в (3.4.13) и при соответствующих им ядрах Дирихле в (3.4.14) меняют знак для нечётных l, а спектральное ядро $\mathrm{Q}(\nu)$ имеет фазовый множитель $e^{-j\pi(N-1)\nu}$. Это объясняется сдвигом оконной функции на $N/2$ отсчётов вправо и отбрасыванием крайней правой точки.

В качестве ещё одного примера приведём так называемое окно Блэкмана для ДПФ, которое определяется следующим образом:

$$w(k)=\begin{cases}0,42-0,5\cos\frac{2\pi}{N}k+0,08\cos\frac{4\pi}{N}k, & k=0,1,2,\ldots N-1,\\ 0, & \text{при других } k.\end{cases}$$

Его амплитудно-частотная характеристика получается с учётом (3.4.14)

$$\begin{aligned}W(\nu)=0,42\mathrm{Q}(\nu)-0,5\left[\mathrm{Q}\left(\nu-\frac{1}{N}\right)+\mathrm{Q}\left(\nu+\frac{1}{N}\right)\right]+\\+0,08\left[\mathrm{Q}\left(\nu-\frac{2}{N}\right)+\mathrm{Q}\left(\nu+\frac{2}{N}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

$$\mathrm{Q}(\nu)=e^{-j\pi(N-1)\nu}\ \frac{\sin\pi\nu(N+1)}{\sin\pi\nu}.$$

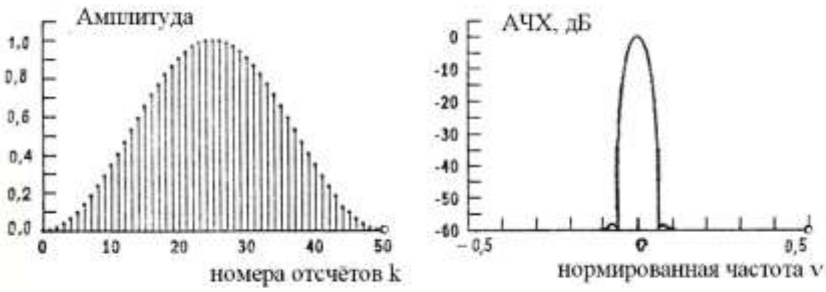


Рис. 3.4.3. Окно Блэкмана

Как видно из (3.4.16), частотная характеристика обобщённого окна представляется суммой сдвинутых по частоте характеристик прямоугольного окна $\mathrm{Q}(\nu)$. При этом вторая, третья, четвёртая и пятая компоненты существенно уменьшают амплитуду бокового лепестка вблизи главного, в результате чего уровни боковых лепестков $W(\nu)$ оказываются значительно ниже, чем у прямоугольного окна. Однако ширина главного лепестка у окна Блэкмана оказывается в три раза больше, чем у прямоугольного.

Значения основных параметров рассмотренного семейства окон приведены в таблице 3.4.2.

Таблица 3.4.2

Окно	МБЛ, дБ	Скорость спада боковых лепестков, дБ/октава	Ширина полосы главного лепестка
Прямоугольное	–13	–6	$2/N$
Ханна	–31	–18	$4/N$
Хэмминга	–43	–6	$4/N$
Блэкмана	-57	-6	$6/N$

В работе [2] предложен новый эффективный метод расчёта оконных функций, основанный на минимизации мощности его спектральных компонент вне пределов заданного интервала частот. С использованием этого метода можно реализовать как стандартные оконные функции, так и ряд новых функций с очень низким уровнем боковых лепестков (–100 дБ и ниже). Такие окна эффективны при обнаружении слабых гармонических сигналов в широкополосном шуме и при наличии интенсивных гармонических помех.

Литература

1. *Марпл.-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.
2. *Дворкович В.П.* Новый метод расчёта эффективных оконных функций, используемых при гармоническом анализе с помощью ДПФ // Цифровая обработка сигналов. – 2001. – № 2, № 3.

3.5. Примеры решения задач (окна при ДПФ-спектральном анализе)

Задача 1. Задана последовательность отсчетов суммы трех синусоид с различными нормированными частотами, не совпадающими с бинами ДПФ:

$$x(k)=\sin 2\pi\frac{2,5}{16}k+\sin 2\pi\frac{3,5}{16}k+\sin 2\pi\frac{5,6}{16}k$$

Построить график ДВПФ для прямоугольного окна на интервале $\nu\in[0,1]$ и графики ДПФ для N=16, 32, 64. ДПФ с N= 32, 64 получаются дополнением последовательности $x(k)$ нулями.

Решение.

Графики изображены на рис. 1, 2, 3, 4. На графиках изображены коэффициенты ДПФ вычисленные без множителя $\frac{1}{N}$. На этих графиках показана также огибающая, которая является ДВПФ. Как видно, добавление нулей улучшает визуализацию ДВПФ.

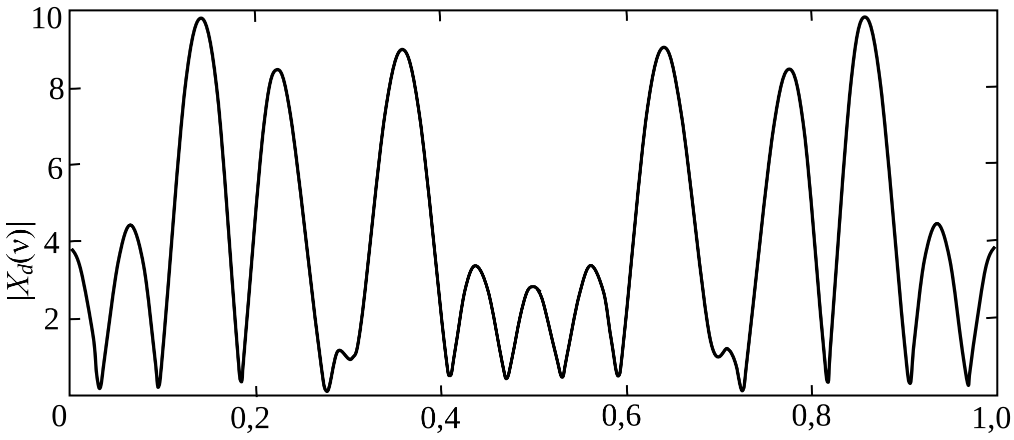


Рис. 1. График ДВПФ последовательности $x(k)$ в случае прямоугольного окна

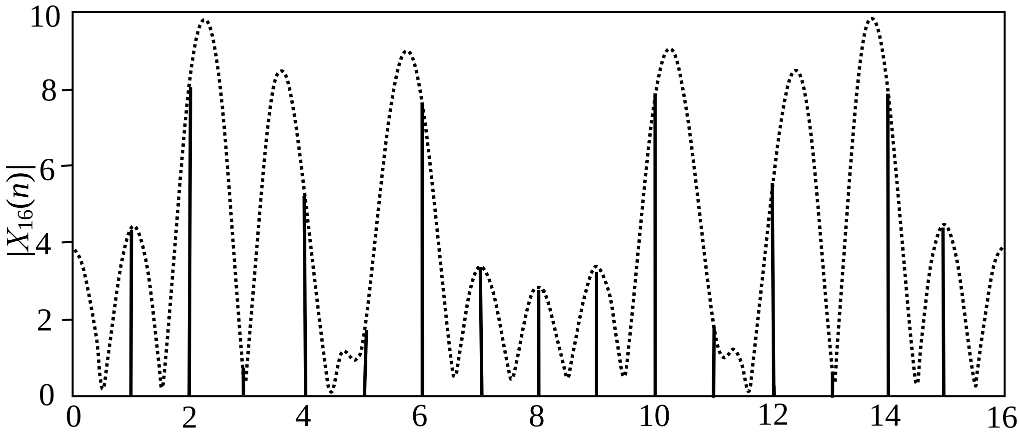


Рис. 2. График ДПФ последовательности $x(k)$ для N = 16

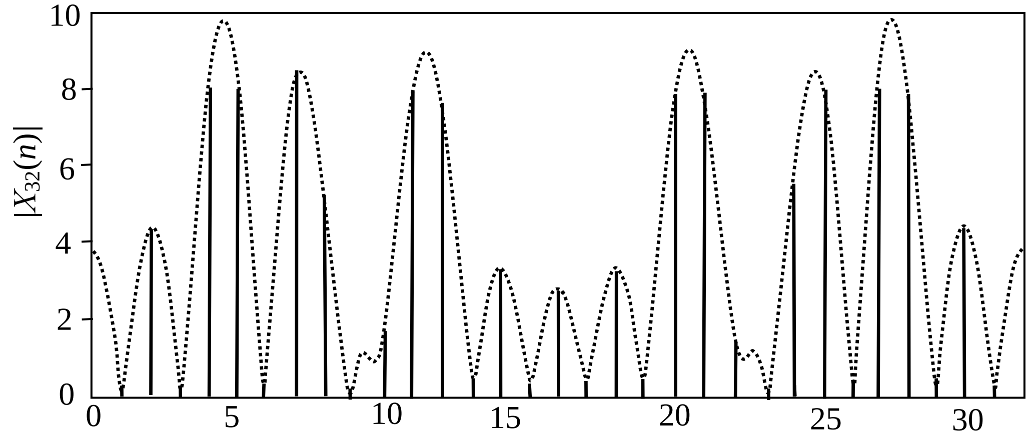


Рис. 3. График ДПФ последовательности $x(k)$ для N = 32

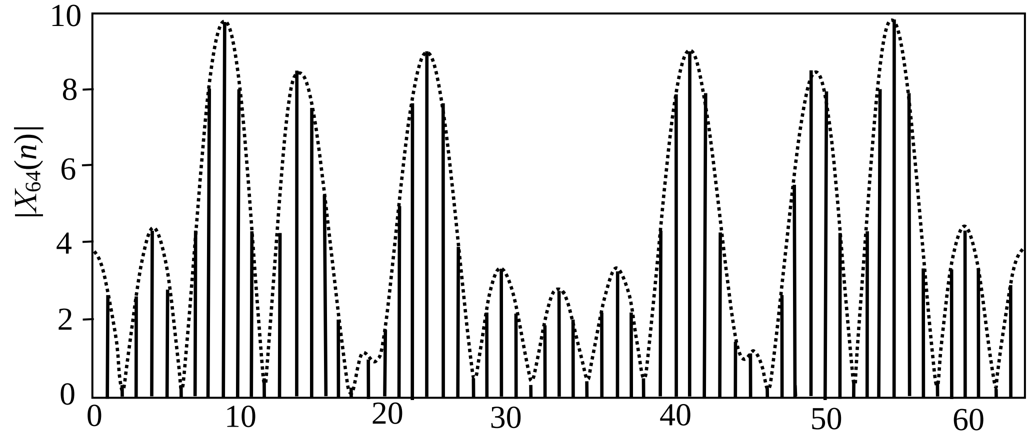


Рис. 4. График ДПФ последовательности $x(k)$ для N = 64

Задача 2.

Последовательность $x(k)$ и оконная функция $w(k)$ изображены на рис. 5. Образуем новую.

$$y(k) = x(k)\, w(k).$$

Найти $Y(n)$ и изобразить $|Y(n)|$. Оценить гребешковый эффект.

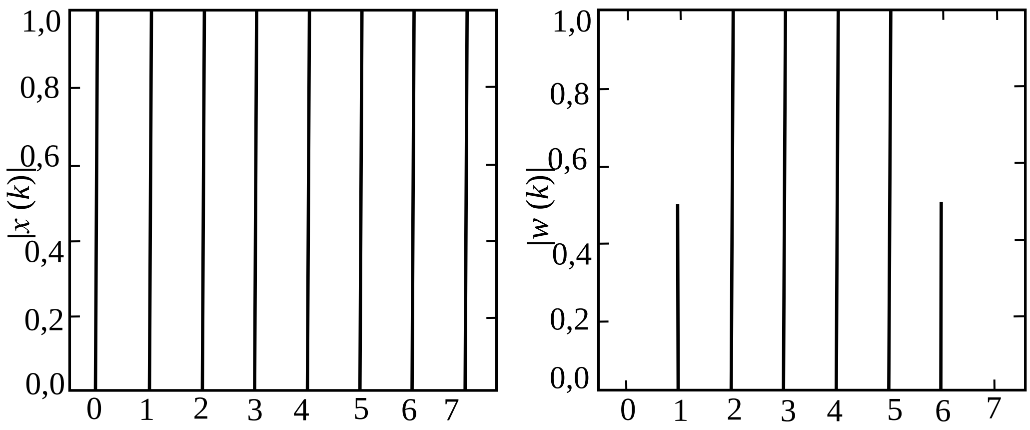


Рис. 5. Графики последовательностей $x(k)$ и $w(k)$

Решение.

$$
\begin{aligned}
Y(n) &= \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} x(k)w(k)e^{-j2\pi\frac{nk}{8}} \\
&= \frac{1}{8}\left(0,5e^{-j2\pi\frac{n}{8}} + 0,5e^{-j2\pi\frac{2n}{8}} + e^{-j2\pi\frac{3n}{8}} + e^{-j2\pi\frac{4n}{8}} + e^{-j2\pi\frac{5n}{8}} + e^{-j2\pi\frac{6n}{8}}\right) = \\
&= \frac{1}{8}\left(\begin{array}{l} 0,5e^{-j2\pi\frac{n}{8}}\left(1+e^{-j2\pi\frac{n}{8}}\right) + 0,5e^{-j2\pi\frac{2n}{8}}\left(1+e^{-j2\pi\frac{n}{8}}\right) + 0,5e^{-j2\pi\frac{3n}{8}}\left(1+e^{-j2\pi\frac{n}{8}}\right) + \\ + e^{-j2\pi\frac{4n}{8}}\left(1+e^{-j2\pi\frac{n}{8}}\right) + 0,5e^{-j2\pi\frac{5n}{8}}\left(1+e^{-j2\pi\frac{n}{8}}\right) \end{array}\right) = \\
&= \frac{1}{8}0,5\left(1+e^{-j2\pi\frac{n}{8}}\right)\left(e^{-j2\pi\frac{n}{8}} + e^{-j2\pi\frac{2n}{8}} + e^{-j2\pi\frac{3n}{8}} + e^{-j2\pi\frac{4n}{8}} e^{-j2\pi\frac{5n}{8}}\right) = \\
&= \frac{1}{8}\cos\left(2\pi\frac{n}{16}\right)e^{-j2\pi\frac{n}{16}}e^{-j2\pi\frac{n}{8}}\frac{1-e^{-j2\pi\frac{5n}{8}}}{1-e^{-j2\pi\frac{n}{8}}} = \\
&= \frac{1}{8}\cos\left(2\pi\frac{n}{16}\right)e^{-j2\pi\frac{n}{16}}e^{-j2\pi\frac{n}{8}}\frac{e^{-j2\pi\frac{5n}{8}\sin\left(2\pi\frac{5n}{16}\right)}}{e^{-j2\pi\frac{n}{16}\sin\left(2\pi\frac{n}{16}\right)}} = \\
&= \frac{1}{8}e^{-j2\pi\frac{7n}{16}}\frac{\sin\left(2\pi\frac{5n}{16}\right)\cos\left(2\pi\frac{n}{16}\right)}{\sin\left(2\pi\frac{n}{16}\right)}.
\end{aligned}
$$

Коэффициенты $Y(n) = W(n)$ изображены на рис. 6.

Аналогичным образом найдем ДВПФ последовательности $w(k)$:

$$W_d(\nu) = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} w(k)e^{-j2\pi\nu k} = e^{-j7\pi\nu}\frac{\sin(5\pi\nu)\cos(\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}.$$

Для того, чтобы оценить «гребешковый эффект», определим коэффициент, который характеризует амплитуду гармонического сигнала на выходе ДПФ-анализатора в самом неблагоприятном случае, когда частота сигнала находится между соседними бинами ДПФ (см. рис. 6):

$$K = 20\lg\frac{W_d\left(\nu = \frac{n = 1/2}{N}\right)}{W_d\left(\nu = \frac{n}{N}\right)}.$$

Коэффициент в нашем случае равен –1,55дБ. Для сравнения, заметим, что в случае прямоугольного окна, данный коэффициент был бы равен –3,86 дБ, а в случае треугольного –2,71 дБ.

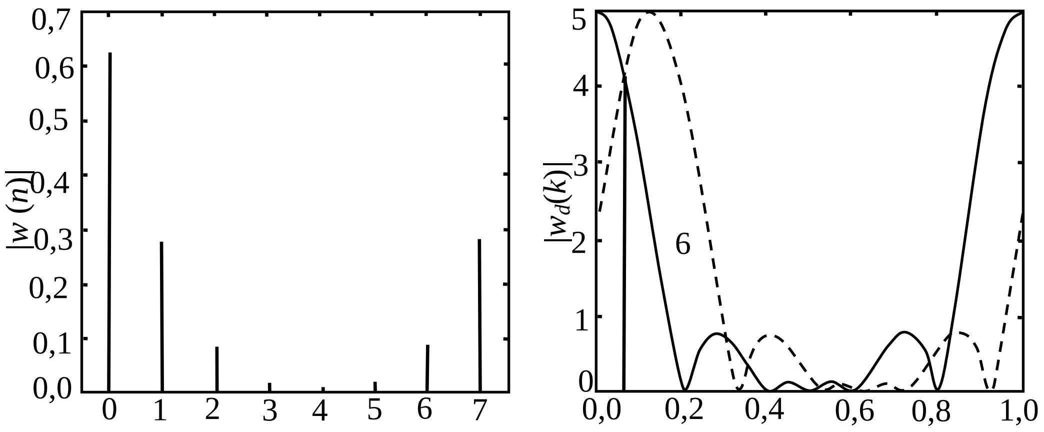


Рис. 6. Графики ДПФ и ДВПФ последовательности $w(k)$

Задача 3. Даны три последовательности, каждая из котрых состоит из двух косинусоид с разными относительными частотами:

$$x_1(k) = \cos\frac{\pi k}{4} + \cos\frac{17\pi k}{64}$$

$$x_2(k) = \cos\frac{\pi k}{4} + 0.8\cos\frac{21\pi k}{64}$$

$$x3(k) = \cos\frac{\pi k}{4} + 0.008\cos\frac{21\pi k}{64}$$

Реальная оценка спектра сигнала проводится с помощью окна $N = 64$ ДПФ. Указать оценки, в которых будут отличаться два пика. Окно прямоугольное.

Решение.

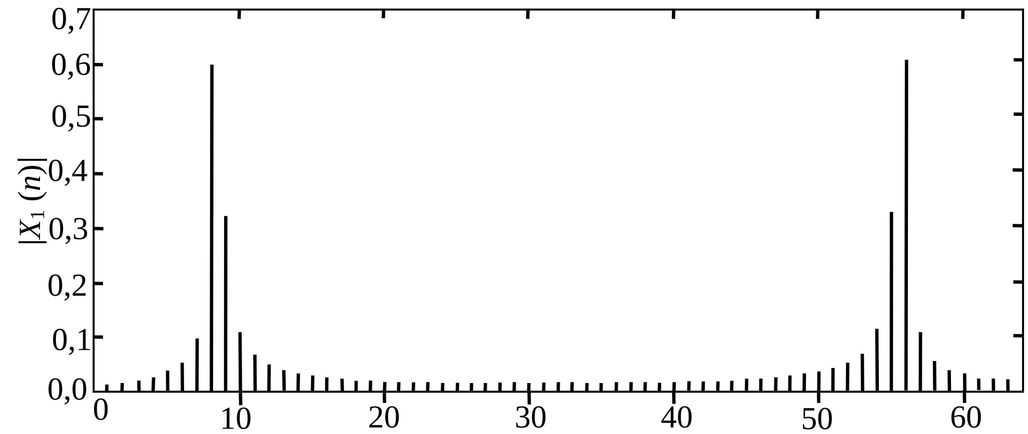
$$\begin{aligned} x_1(k) &= \cos\frac{\pi k}{4} + \cos\frac{17\pi k}{64} = \cos 2\pi k\,\frac{8}{64} + \cos 2\pi k\,\frac{8.5}{64} \\ x_2(k) &= \cos\frac{\pi k}{4} + 0.8\cos\frac{21\pi k}{64} = \cos 2\pi k\,\frac{8}{64} + 0.8\cos 2\pi k\,\frac{10.5}{64} \\ x3(k) &= \cos\frac{\pi k}{4} + 0.008\cos\frac{21\pi k}{64} = \cos 2\pi k\,\frac{8}{64} + 0.008\cos 2\pi k\,\frac{10.5}{64} \end{aligned},$$

Спектральное окно:

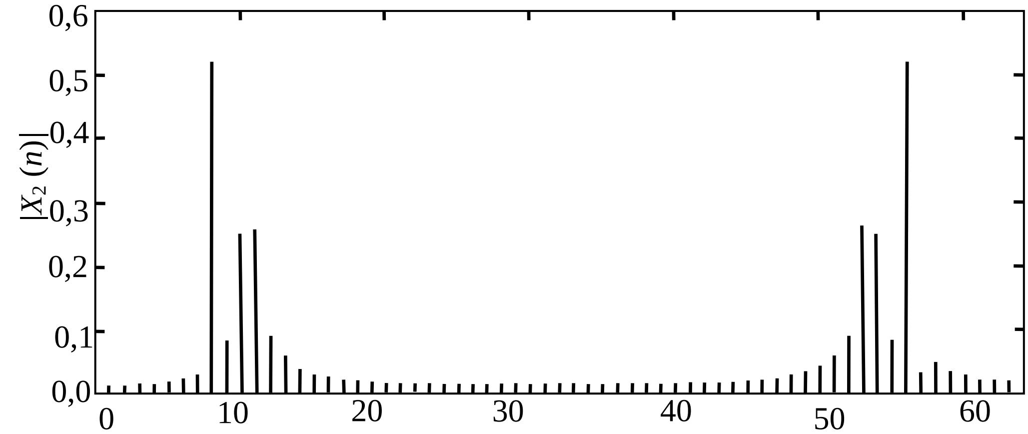
$$W(\nu) = e^{-j\pi\nu(N-1)}\frac{\sin\pi\nu(N+1)}{\sin\pi\nu} = e^{-63j\pi\nu}\frac{\sin 65\pi\nu}{\sin\pi\nu}$$

Для сигнала $x_1(k)$ два пика различаться не будут, т. к. они находятся слишком близко $\Delta\nu_1 = \dfrac{1}{2N}$, на расстоянии, меньшем разрешающей способности окна (см. рис.7а)

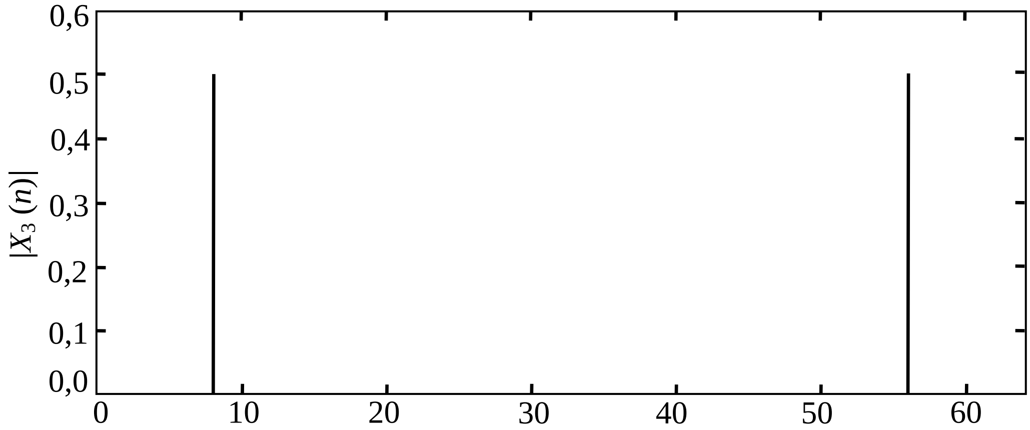
Для сигнала $x_2(k)$ два пика можно различить. Расстояние между пиками составляет $\Delta\nu_1 = \dfrac{2.5}{N}$.



(а) График ДПФ последовательности $x_1(k)$



(б) График ДПФ последовательности $x_2(k)$



(в) График ДПФ последовательности $x_3(k)$

Рис. 7. Графики к задаче 3

Для сигнала $x_2(k)$ два пика можно различить. Расстояние между пиками составляет $\Delta\nu_1 = \frac{2.5}{N}$. Нормированная АЧХ при этом составляет $\frac{W(\Delta\nu_2)}{W(0)} = 0.12 < 0.8,$ следовательно, боковые лепестки от пика в $\nu = \frac{8}{64}$ не сильно влияют на пик $\nu = \frac{10.5}{64}$ (см. рис. 7б).

В случае сигнала $x_3(k)$ второй пик $\nu = \frac{10.5}{64}$ будет неразличим, поскольку уровень бокового лепестка от пика $\nu = \frac{8}{64}$ превышает уровень главного лепестка второго пика: 0.12 >> 0.008 (см. рис. 7в).

Ответ: два пика будут различаться только в оценке x_2.

Задача 4.

Для данных последовательности $x\,(k)$ и окна $w\,(k)$ вычисляется взвешенная последовательность $y(k)= x\,(k)\,w(k)$. При длине окна $N=2^8$ требуется добиться разрешения $\Delta\Theta_0 = \frac{\pi}{25}$, $\Theta = 2\pi\nu = \Delta t.$ Разрешение совпадает с шириной главного лепестка на нулевом уровне. Какие из окон (прямоугольное, треугольное, Ханна, Хемминга) удовлетворяет условию задачи?

Решение.

$$\Delta\Theta_0 = \frac{\pi}{25} \Rightarrow \Delta\nu_0 = \frac{1}{50} = 0.02$$

Таким образом, прямоугольное окно удовлетворяет условию задачи.

У треугольного окна главный лепесток в два раза шире, его ширина составляет $\frac{4}{N} = 2^{-6}$, что тоже меньше, чем 0.02. Треугольное окно тоже удовлетворяет условию задачи. Ширина окна Ханна на нулевом уровне составляет 4 бина, т.е. $\frac{4}{N} = 2^{-6}$. Окно Ханна удовлетворяет задачи. Главный лепесток окна Хемминга тоже имеет ширину 4 бина, поэтому оно тоже удовлетворяет условию задачи.

Ответ: все окна (прямоугольное, треугольное, Ханна, Хемминга) удовлетворяет условию задачи.

Задача 5.

Дана последовательность $x(k)$ и её ДПФ $X(n)$, $n, k = 0\ldots N-1$. Последовательности $x_1(k)$ и $x_2(k)$ содержат в себе, соответственно, четные и нечетные последовательности $x(k)$. Их ДПФ, соответственно, $X_1(n)$ и $X_2(n)$. Определить связь между $X(n)$, $X_1(n)$ и $X_2(n)$.

Решение.

$$X_1(n) = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k) e^{-j\frac{2\pi}{N}n(2k)},$$

$$X_2(n) = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1) e^{-j\frac{2\pi}{N}n(2k)} = e^{j\frac{2\pi}{N}n}\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1) e^{-j\frac{2\pi}{N}n(2k+1)},$$

$$X(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{2}X_1(n) + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}X_2(n).$$

Если вычислять ДПФ без нормирующего множителя $\frac{1}{N}$, то получится связь:

$$X(n) = X_1(n) + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}X_2(n).$$

Это соотношение играет ключевую роль для понимания алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) с основанием 2.

Упражнение 1. **Восстановление спектральной плотности по коэффициентам ДПФ.**

Пусть $x(k)$ – N-точечная последовательность. ДВПФ этой последовательности

$$X(\nu) = \Delta t\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k},$$

где $\nu = f\Delta t = f / f_д$ – нормированная частота (доли частота дискретизации). Используя формулу обратного ДПФ, получим

$$X(\nu) = \Delta t\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right] e^{-j2\pi\nu k} = \Delta t\sum_{n=0}^{N-1} X(n)\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi(\nu-\frac{n}{N})k}.$$

Просуммируем N членов геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi(\nu-\frac{n}{N})k} = \frac{1-e^{-j2\pi(\nu-\frac{n}{N})N}}{1-e^{-j2\pi(\nu-\frac{n}{N})}} = \frac{e^{-j\pi(\nu-\frac{n}{N})N}}{e^{-j\pi(\nu-\frac{n}{N})}}\cdot\frac{\sin\pi(\nu-\frac{n}{N})N}{\sin\pi(\nu-\frac{n}{N})} =$$

$$= e^{-j\pi(\nu-\frac{n}{N})(N-1)}\frac{\sin\pi(\nu-\frac{n}{N})N}{\sin\pi(\nu-\frac{n}{N})}.$$

Поэтому для $X(\nu)$ можем записать

$$X(\nu) = \Delta t\sum_{n=0}^{N-1} X(n)\frac{\sin\pi(\nu-\frac{n}{N})N}{\sin\pi(\nu-\frac{n}{N})} e^{-j\pi(\nu-\frac{n}{N})(N-1)}.$$

Это интерполяционная формула восстановления континуальной функции $X(\nu)$ по коэффициентам ДПФ $X(n)$. В точках $\nu = n/N$ имеет место

$$X(n\Delta\nu) = N\Delta t\, X(n),\ \ \Delta\nu = 1/N.$$

Таким образом, *коэффициенты ДПФ* $X(n)$ *можно рассматривать как отсчёты функции* $X(\nu)/N\Delta t$ *, взятые с шагом* $\Delta\nu = 1/N$ в соответствии с теоремой отсчётов в частотной области. Значение спектральной плотности (1) в L равноотстоящих точках $\nu = l\Delta\nu = l/L,$ при $L > N$ определяются по формуле

$$X(\nu = \frac{l}{L}) = \Delta t\sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi\frac{l}{L}k},\ \ l = 0,\ 1,\ 2,\ ...,N-1,$$

Тот же результат будет получен, если конечную последовательность $x(k)$ длины N дополнить нулями до длины L:

$$\tilde{x}(k) = \begin{cases} x(k), & 0 \le k \le N-1, \\ 0, & N \le k \le L-1, \end{cases}$$

и найти ее ДПФ (1), заменяя N на L

$$X(\nu = \frac{l}{L}) = \Delta t\sum_{k=0}^{L-1} x(k)e^{-j2\pi\frac{l}{L}k} = \Delta t\sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi\frac{l}{L}k}.$$

Напомним, что *разрешение по частоте,* под которым понимают минимальное расстояние между дискретными гармониками в ДПФ, определяется исключительно шагом дискретизации по частоте $\Delta f = \dfrac{f_д}{N}$ и при фиксированной частоте дискретизации $f_д$ зависит только от первоначальной длины последовательности, поскольку она и только она определяет спектральный состав последовательности. Потому увеличение длины конечной последовательности за счет добавления $L-N$ нулей и, соответственно, уменьшение шага дискретизации по частоте до $\Delta\tilde{f} = \dfrac{f_д}{L}$, *не меняет разрешения по частоте,* а лишь *улучшает условия различения* близко расположенных частот гармоник.

Упражнение 2. Улучшение различения гармоник с близко расположенными частотами

Пусть $x(k)$ – N-точечная последовательность. При ДПФ-анализе этой последовательности

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j(2\pi/N)nk},\quad n = 0,1,2,...,N-1$$

частотное разрешение равно шагу дискретизации по частоте $\Delta f = \dfrac{f_д}{N}$ и при фиксированной частоте дискретизации $f_д$ зависит только от первоначальной длины последовательности, поскольку она и только она определяет спектральный состав последовательности. Для улучшения различения дискретных гармоник с близко расположенными частотами f_1 и f_2, расстояние между которыми удовлетворяет условию

$$\Delta f < \left| f_1 - f_2 \right| < 2\Delta f\ ,$$

исходную последовательность необходимо дополнить нулями до длины L:

$$L \ge \frac{f_д}{\left| f_1 - f_2 \right| - \Delta f}.$$

После этого по L точкам восстановить спектральную плотность с шагом дискретизации по частоте $\Delta\tilde{f} = \dfrac{f_д}{L}$ и по графику определить ближайшие пики на частотах близких к f_1 и f_2. В общем случае эти частоты могут быть некратными шагу $\Delta\tilde{f}$ и будут определены с погрешностью.

Задачи для самостоятельного решения к лекции 18 февраля 2019 г.

1. Рассмотреть спектральную оценку дискретного сигнала $x(k)$, полученную с помощью ДПФ и окна Хемминга $w(k)$. При практическом спектральном анализе пользуются правилом, согласно которому частотное разрешение равно ширине главного лепестка $W(\nu)$. При какой наименьшей длине $N = 2^\nu$ удастся идентифицировать синусоидальные сигналы, разность частот которых составляет $\pi/100$.

2. Паразитная амплитудная модуляция количественно оценивается коэффициентом модуляции $K_{мод}$, который характеризует амплитуду гармонического сигнала на выходе ДПФ анализатора с оконной функцией $W(\nu)$. В самом неблагоприятном случае частота сигнала находится между соседними бинами ДПФ. Величина $K_{мод}$, выраженная в децибелах, определяется как

$$K_{мод} = 20\lg \frac{W\left(\nu = \dfrac{n+1/2}{N}\right)}{W\left(\nu = \dfrac{n}{N}\right)}.$$

Определить $K_{мод}$ для прямоугольного окна и для окна Ханна.

Для снижения этой погрешности можно воспользоваться методом дополнения исходной реализации нулями до $2N$ отсчетов. Для рассматриваемых окон и новой сетки частот ДПФ определить значения $K_{мод}$ (также в самом неблагоприятном случае).

3. Анализируемый сигнал $x(k)$ представляет собой сумму M синусоидальных составляющих и, возможно, белого шума $x_ш(k)$:

$$x(k) = \sum_{m=1}^{M} A_m \sin(2\pi\nu_m k + \varphi_m) + x_ш(k), \tag{1}$$

где A_m, ν_m, φ_m – соответственно амплитуда, частота и фаза m-й синусоидальной составляющей; $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Исходными данными являются N отсчётов сигнала $x(k\Delta t)$, т. е. время наблюдения равно $T = N\Delta t$. Конечность времени наблюдения составляет основную особенность спектрального анализа.

Пусть в (1) $M > 1$, $x_ш = 0$, известны частоты синусоидальных составляющих $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_M$. Требуется оценить неизвестные амплитуды $A_1, A_2, \ldots, A_M$ и фазы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_M$ синусоидальных составляющих.