3.6. Спектральный анализ случайных последовательностей методом ДПФ

При спектральных измерениях случайных сигналов основной целью является определение *спектральной плотности мощности* (СПМ) («Основы ЦОС», лекция 30 октября 2018).

Прямой метод определения СПМ случайных последовательностей основан на вычислении квадрата модуля ДПФ отдельных участков последовательности данных с использованием соответствующего статистического усреднения. Этот метод получил название *метода периодограмм.*

Косвенный метод определения СПМ основан на предварительном определении автокорреляционной последовательности (АКП) с последующим применением теоремы Винера-Хинчина в дискретном варианте. Оценка СПМ получается вычислением ДПФ от АКП. Этот метод называется *корреляционным.*

В любом случае мы обычно интересуемся *состоятельными оценками* (в пределе при увеличении длины L наблюдаемой последовательности $x(k)$ смещение и дисперсия оценок должны стремиться к нулю при $L \to \infty$).

Метод периодограмм оценки СПМ с использованием ДПФ

По определению СПМ стационарного случайного процесса с реализацией $x(t)$ задаётся выражением («Основы ЦОС», лекция 19 ноября 2018, п. 3.7):

$$G(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} M\left[\left|X(f,T)\right|^2\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} M\left[\left|\int_0^T x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt\right|^2\right]. \qquad (3.6.1)$$

Оператор математического ожидания M здесь необходим, т. к. без него предел не сходится.

Выборочная СПМ последовательности конечной длины $x(0), x(1), ..., x(N-1)$ описывается выражением

$$\widehat{G}(f) = \frac{1}{N\Delta t}\left|X(f)\right|^2, \qquad (3.6.2)$$

где $X(f)-$ дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ), определяемое как

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j2\pi f k\Delta t}.$$

Объединяя эти два выражения, приходим к *периодограммному методу* оценки СПМ случайной последовательности:

$$\widehat{G}(f) = \frac{1}{N\Delta t}\left|\Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi f k\Delta t}\right|^2. \qquad (3.6.3)$$

Оценка (3.6.3) определяется на частотном интервале $-1/2\Delta t \le f \le 1/2\Delta t,$ является периодической с периодом $f_д = 1/\Delta t$ и может быть вычислена на дискретном множестве из N эквидистантных частот ДПФ $f_n = n\Delta f,\ \Delta f = (1/N\Delta t)$ Гц:

$$\widehat{G}(n\Delta f) = \frac{1}{N\Delta t}\left|X(n\Delta f)\right|^2 = \frac{1}{N\Delta t}\left[\Delta t\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right]^2.$$

Отсюда

$$\widehat{G}(n\Delta f) = N\Delta t\left|X(n)\right|^2, \tag{3.6.4}$$

где $X(n)-$ коэффициенты ДПФ, вычисляемые по формуле:

$$X(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, ..., N-1.$$

Благодаря вычислительной эффективности алгоритма БПФ (быстрое преобразование Фурье) периодограммный метод оценки СПМ получил широкое распространение.

Будучи случайной, периодограмма (3.6.4) нуждается в статистическом усреднении. Действительно в (3.6.4) опущена операция вычисления математического ожидания, предусмотренная выражением (3.6.1). Практически для сглаживания периодограммы используется усреднение по *псевдоансамблю*. Процедура усреднения значительно упрощается, если процессы обладают свойством *эргодичности.* Это свойство означает, что почти каждый член ансамбля ведет себя в статистическом смысле так же, как и весь ансамбль. Таким образом, можно проанализировать статистические характеристики процесса путем усреднения по времени вдоль одной реализации. Условие эргодичности случайного процесса включает в себя и условие стационарности.

В методе Бартлетта производится усреднение по множеству периодограмм, получаемых по неперекрывающимся сегментам исходной последовательности $x(k)$.

Пусть заданы шаг дискретизации Δt анализируемого процесса $x(t)$ и число отсчетов L действительной последовательности $x(k)$. Выделим следующие этапы вычисления СПМ:

1) Разделим последовательность $x(k)$ на P неперекрывающихся сегментов по N отсчетов в каждом (рис. 3.6.1), т. е. $L = P \cdot N$. Выбор $N = 2^{\nu}$, $\nu-$ целое, позволяет использовать стандартный алгоритм БПФ.

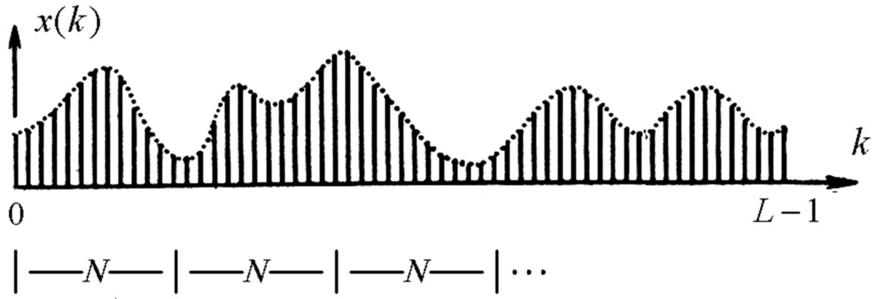


Рис. 3.6.1. Секционирование входной последовательности
при вычислении СПМ по методу Бартлетта

2) Вычисление ДПФ последовательности по каждому сегменту

$$X_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_p(k\Delta t)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \tag{3.6.5}$$

где $x_p(k) = x(pN+k), \quad p = 0, 1, 2, \ldots P-1$.

3) Расчет периодограмм

$$\hat{G}_p(n\Delta f) = N\Delta t\left|X_p(n)\right|^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \tag{3.6.6}$$

где $\Delta f = 1/N\Delta t -$ шаг сетки частот при ДПФ. Оценка (3.6.6) является «сырой» оценкой СПМ, нуждающейся в сглаживании.

4) Расчет усредненной оценки СПМ

$$\hat{G}(n\Delta f) = \frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1}\hat{G}_p(n\Delta f) \tag{3.6.7}$$

Выражение (3.6.7) можно рассматривать как выборочное среднее совокупности из P независимых измерений СПМ. Это приближённо выполняется, если корреляция между отсчётами $x(k)$ и $x(k+m)$, разнесёнными на интервал $m \geq N$ мала.

5) Расчет статистической точности. *Среднее значение оценки* (3.6.7) определяется выражением

$$M\left\{\hat{G}(n\Delta f)\right\} = \frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1} M\left\{\hat{G}_p(n\Delta f)\right\}. \tag{3.6.8}$$

Возможное смещение оценки обусловлено действием прямоугольного окна $w(k)$, которое смещает выборочный спектр каждого отдельного сегмента. Минимальная ширина спектральных пиков взвешенной прямоугольным окном последовательности определяется шириной главного лепестка функции

$$W(f) = \Delta t\sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-j2\pi f k\Delta t} = \Delta t e^{-j\pi f(N-1)\Delta t}\frac{\sin \pi f N\Delta t}{\sin \pi f \Delta t}. \tag{3.6.9}$$

и не зависит от исходных данных. Боковые лепестки спектрального окна $W(f)$, называемые *просачиванием*, будут также изменять амплитуды соседних спектральных пиков, что может привести к дополнительному смещению по частоте (п. 3.2). Можно показать [1], что среднее значение периодограммы определяется выражением

$$M\left\{\hat{G}(n\Delta f)\right\} = \int_{-f_д/2}^{f_д/2} \left|W(f)\right|^2 G(n\Delta f - f)df, \tag{3.6.10}$$

где $G(f)$ – истинная спектральная плотность мощности анализируемого процесса с отсчётами $x(k)$. Из (3.6.10) следует, что умножение последовательности $x(k)$ на функцию окна $w(k)$ в частотной области приводит к периодической свёртке СПМ анализируемого процесса с квадратом модуля ДВПФ оконной функции. Если истинный спектр процесса сосредоточен в узкой полосе, то такая операция приводит к просачиванию мощности в соседние частотные участки. Это явление, названное *просачиванием* (или утечкой) мощности является следствием взвешивания отсчётов. Утечка ухудшает точность оценивания СПМ и обнаруживаемость синусоидальных составляющих анализируемого процесса. Боковые лепестки из соседних частотных ячеек складываются или вычитаются с главным лепестком отклика в других частотных ячейках спектра, влияя тем самым на оценку СПМ в этой ячейке разрешения.

Дисперсия усредненной оценки

$$\sigma_{\hat{G}}^2 \approx \frac{G^2(n\Delta f)}{P} \tag{3.6.11}$$

обратно пропорциональна числу сегментов. При этом мы предполагаем, что периодограммы сегментов статистически независимы, что справедливо, если значения автокорреляции $r_{xx}(m)$ малы при $m > N$.

Что касается разрешения, то оно в результате разбиения на сегменты по N отсчетов будет $\Delta f = (1/N\Delta t) > (1/L\Delta t)$, т. е. будет ухудшаться. При фиксированном $L = N \cdot P$ имеет место компромиссное соотношение между разрешением $(1/N\Delta t)$ и дисперсией оценки, которая обратно пропорциональна числу сегментов $P = L/N$.

Метод модифицированных периодограмм (метод Уэлча)

Модификацией метода Бартлетта является метод Уэлча, при котором используются оконные функции и перекрывающиеся сегменты. Перед вычислением периодограммы каждого сегмента этот сегмент умножается на оконную функцию $w(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Цель применения окна ослабить эффекты из-за боковых лепестков и уменьшить смещение оценки. Однако, при этом незначительно ухудшается разрешение (по сравнению с прямоугольным окном). Цель перекрытия сегментов – увеличить число усредняемых сегментов P при заданной длине L записи данных. Тем самым уменьшается дисперсия оценки СПМ:

1) Разобьем действительную последовательность $x(k)$ на сегменты $x_p(k)$, содержащие по N отсчётов и сдвинутые относительно друг друга на D отсчетов (рис. 3.6.2).

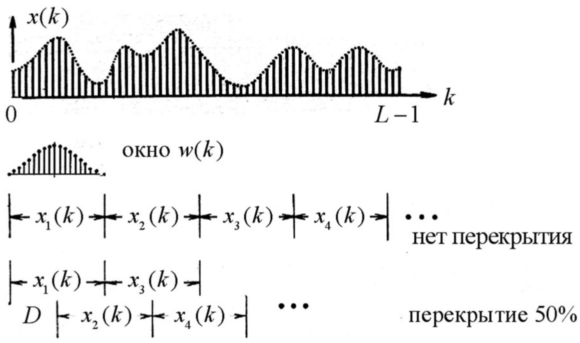


Рис. 3.6.2. Секционирование входной последовательности
при вычислении СПМ по методу Уэлча

Тогда $x_p(k) = x[k + pD]$, $p = 0, 1, 2, \ldots P-1$, где P – число сегментов.

2) Каждый сегмент взвешивается оконной функцией $w(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

3) Вычисление ДПФ по каждому взвешенному сегменту с использованием алгоритма БПФ

$$X_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_p(k) w_p(k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \tag{3.6.12}$$

4) Расчет периодограммы

$$\hat{G}_p(n\Delta f) = \frac{N\Delta t}{U} \cdot \left|X_p(n)\right|^2 \tag{3.6.13}$$

где $n\Delta f = n/N\Delta t$ – частоты ДПФ, а $U = \sum_{k=0}^{N-1} w^2(k)$ – энергия окна. Выбор оконной функции $w(k)$ обсуждается далее.

5) Вычисление сглаженной оценки СПМ

$$\hat{G}_W(n\Delta f) = \frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1} \hat{G}_p(n\Delta f) = \frac{1}{PU}\sum_{p=0}^{P-1} \left|X_p(n)\right|^2. \tag{3.6.14}$$

Можно показать [1], что математическое ожидание этой оценки

$$M\left\{\hat{G}\left(n\Delta f\right)\right\}=\frac{1}{U}\int_{-f_д/2}^{f_д/2}\left|W(f)\right|^2 G(n\Delta f-f)df, \qquad (3.6.15)$$

где

$$W(f)=\Delta t\sum_{k=0}^{N-1}w(k)\,e^{-j2\pi f k\Delta t} -$$

ДВПФ оконной функции, а $G(f)$ – истинная спектральная плотность анализируемого процесса. Из (3.6.15) следует, что умножение временной последовательности $x(k)$ на временное окно $w(k)$ приводит к смещению оценки СПМ.

Так же как и дисперсия периодограммы Бартлетта, дисперсия периодограммы Уэлча примерно обратно пропорциональна числу сегментов, т. е.

$$\sigma^2_{\hat{G}_W}\approx\frac{G^2\left(n\Delta f\right)}{P},$$

в предположении независимости сегментов (хотя перекрытие приводит к некоторой их взаимозависимости). Благодаря перекрытию при заданной длине L записи данных можно сформировать большее число сегментов, чем в методе Бартлетта, а это уменьшает величину дисперсии периодограммы Уэлча.

Метод Уэлча является наиболее популярным периодограммным методом спектрального анализа стационарных случайных процессов

В [1] показано, что если последовательность $x(k)$ формируется из реализации гауссовского случайного процесса и $G(f)$ достаточно гладкая в диапазоне частот, где значения ДПФ окна достаточно велики, дисперсия оценки дается формулой

$$\sigma^2_{\hat{G}_W(n\Delta f)}=\frac{\left[G(n\Delta f)\right]^2}{P}\left[1+2\sum_{l=1}^{P-1}\frac{P-l}{P}\rho\left(l\right)\right], \text{ где}$$

$$\rho(l)=\frac{\left[\sum_{k=0}^{N-1}w(k)w(k+lD)\right]^2}{\left[\sum_{k=0}^{N-1}w^2(k)\right]^2}.$$

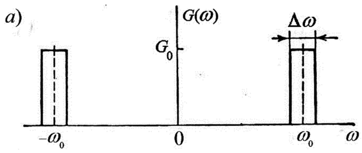
Практически частот используется перекрытие на 50%. Оптимальная степень перекрытия зависит от используемой весовой функции. В [1] приводятся данные о том, что для гауссовских случайных процессов при использовании окна Ханна минимальная дисперсия оценки СПМ получается при перекрытии сегментов на 65%. При этом величина дисперсии увеличивается примерно на 8% при использовании 50% - го перекрытия сегментов.

Литература

1. *Марпл. - мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

Задачи к лекции 25 февраля 2019 г.

1. Для узкополосного случайного процесса со спектром шириной $\Delta\omega$, сосредоточенным возле частот $\pm\omega_0$ определить и изобразить корреляционную функцию $R(\tau)$.



2. Случайный процесс имеет экспоненциальную функцию корреляции

$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \qquad \alpha > 0.$$

Определить и изобразить спектральную плотность мощности $G(\omega)$.

3. Непрерывный стационарный случайный сигнал обладает узкополосной плотностью мощности $G(f)$, равной нулю при $|f| \geq 10$ кГц. На интервале в 10 с сигнал подвергается дискретизации с частотой 20 кГц, после чего спектральная плотность мощности оценивается методом усредненных периодограмм (методом Бартлетта).

а) Чему равна длина последовательности L?

При вычислении периодограмм используется разбиение последовательности на сегменты и вычисление ДПФ на каждом сегменте:

$$\tilde{G}_p(n\Delta f) = N\Delta t\left|X_p(n)\right|^2,$$

где

$$X_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_p(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \; n = 0,1,\ldots,N-1.$$

$$x_p(k) = x(pN+k), \;\; p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ P-1..$$

Длина сегментов сигнала совпадает с размерностью ДПФ и равна N.

б) При каком наименьшем значении N расстояние между частотами, в которых вычисляется спектральная оценка, не превышает 10 Гц?

в) Какое число сегментов P будет иметь сигнал, если отдельные его участки не перекрываются?

г) Нам хотелось бы уменьшить дисперсию оценки в 2 раза, сохранив расстояние между частотами. Сформулируйте метод достижения поставленной цели.