Эффекты интерполяции и децимации

Приведем примеры интерполяции при $L = 2$ и децимации при $M = 2$.

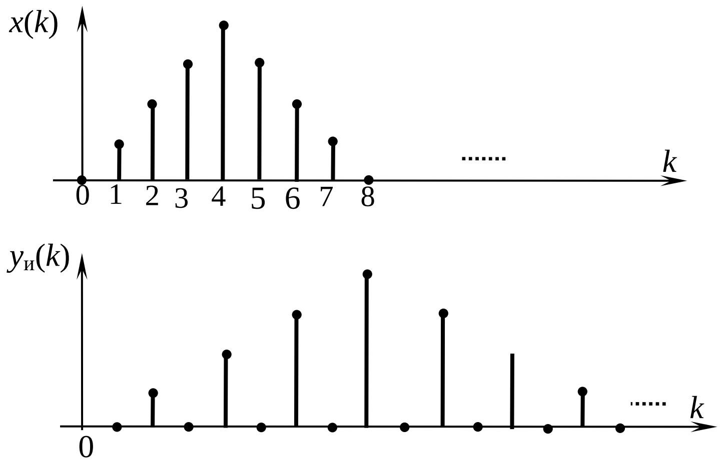


Рис. 6.2.4. Пример интерполяции при $L = 2$

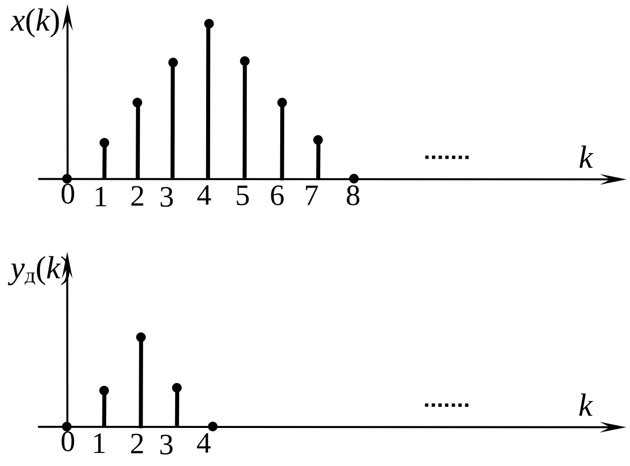


Рис. 6.2.5. Пример децимации при $M = 2$

Спектр (ДВПФ) выходного сигнала интерполятора

$$Y_{\text{и}}(\theta) = X(\theta L),\ \ \theta = \omega\Delta t = 2\pi f\,\Delta t, ,$$

т. е. $Y_{\text{и}}(\theta)$ представляет собой L-кратно сжатый вариант $X(\theta)$, что иллюстрирует рис. 6.2.6 б.

Так как децимация соответствует сжатию во временной области, то в частотной имеет место эффект расширения. ДВПФ выходного сигнала

$$Y_{\text{д}}(\theta) = \sum_{k=0}^{M-1} X((\theta - 2\pi k)/M),\ \ \theta = \omega\Delta t = 2\pi f\,\Delta t.$$

Член при $k = 0$ является M-кратно растянутым вариантом $X(\theta)$. Все $M-1$ членов при $k > 0$ представляют собой равномерно смещенные копии этого растянутого варианта (эффект наложения).

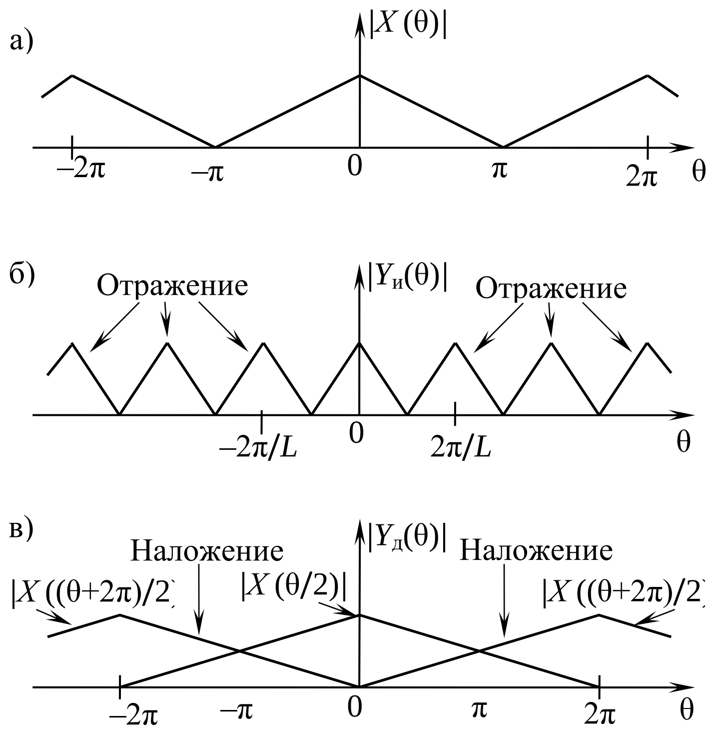


Рис. 6.2.6. Эффекты интерполяции и децимации в спектральной области:
(а) ДВПФ $\left|X(\theta)\right|$; (б) L-кратно сжатый вариант (L = 2; (в) проявление эффекта наложения при $M = 2$.

6.3. Система однократной передискретизации [1]

Система однократной передискретизации представлена на рис. 6.3.1. Повышение или понижение частоты дискретизации на коэффициент передискретизации в виде рациональной дроби *L/M* реализуется каскадным соединением систем интерполяции с коэффициентом L и децимации с коэффициентом M (рис. 6.3.1а). В результате объединения двух каскадно включенных ФНЧ фильтров $H_i\,(z)$ и $H_d\,(z)$, работающих на одинаковой частоте дискретизации $L\,f_д$, переходят к системе однократной передискретизации с единственным ФНЧ (рис. 6.3.1 б). Его идеальная АЧХ, согласно (6.1.5) и (6.1.7), должна удовлетворять требованиям:

$$A(f)=\begin{cases} L \;\; \text{в полосе пропускания} \;\; 0\le f\le \min\left\{f_д/2;\, Lf_д/2M\right\}; \\ 0 \;\; \text{при других} \;\; f. \end{cases} \tag{6.3.1}$$

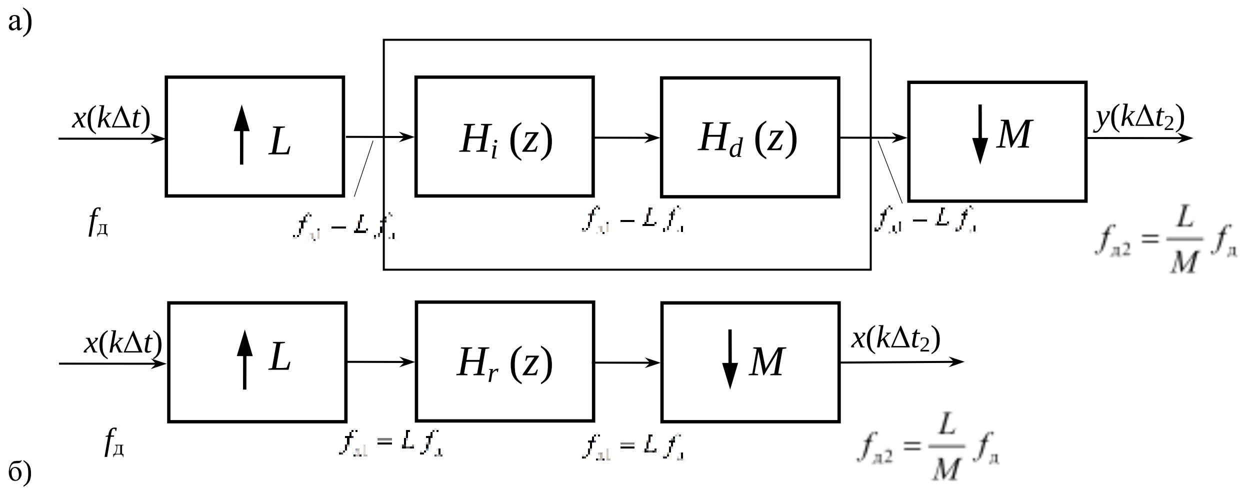


Рис. 6.3.1. Система однократной передискретизации с двумя ФНЧ (а) и одним ФНЧ (б)

Пример 6.3.1 [2]

В практических ситуациях часто бывает нужно изменить частоту дискретизации в нецелое число раз. Такие нецелые множители представляются рациональным числом *L/M*. Необходимое преобразование частоты производится в два этапа:

1) интерполяция с шагом *L*,
2) децимация с шагом *M* (рис. 6.3.2, а).

Необходимо, чтобы процесс интерполяции предшествовал децимации, так как при децимации исчезнут некоторые частотные компоненты.

Поскольку два фильтра нижних частот с импульсными характеристиками $h_1(k)$ и $h_2(k)$ на рис. 6.3.2, а соединены каскадно и имеют общую частоту дискретизации $L\,F_S$, их можно объединить, и тогда получится обобщенный конвертор частоты дискретизации, изображенный на рис. 6.3.2, б. Если $L>M$, операция производимая конвертером называется интерполяцией с нецелым шагом, а если $M>L$ – децимацией.

На рис. 6.3.2 иллюстрируется интерполяция с шагом 3/2. Частота дискретизации вначале увеличивается в три раза (к каждой выборке добавляются две нулевые выборки), а за тем сигнал пропускается через фильтр нижних частот, результат – $v(i)$. Далее фильтрованные данные сокращаются в два раза, т. е. из каждых двух выборок $v(i)$ остается одна. Иллюстрацией данного процесса в частотной области служит рис. 6.3.3.

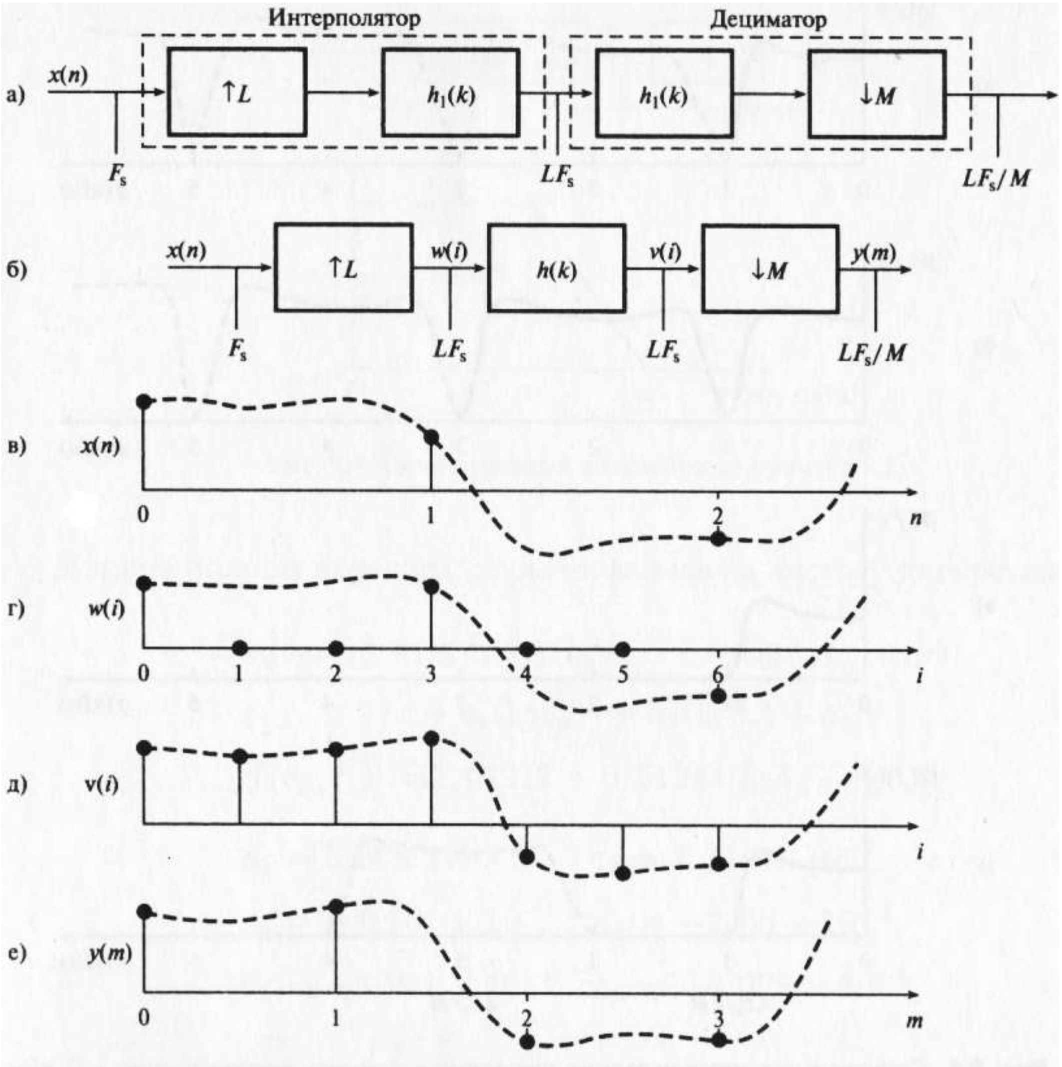


Рис. 6.3.2. Иллюстрация интерполяции с рациональным шагом (L=3, M=2

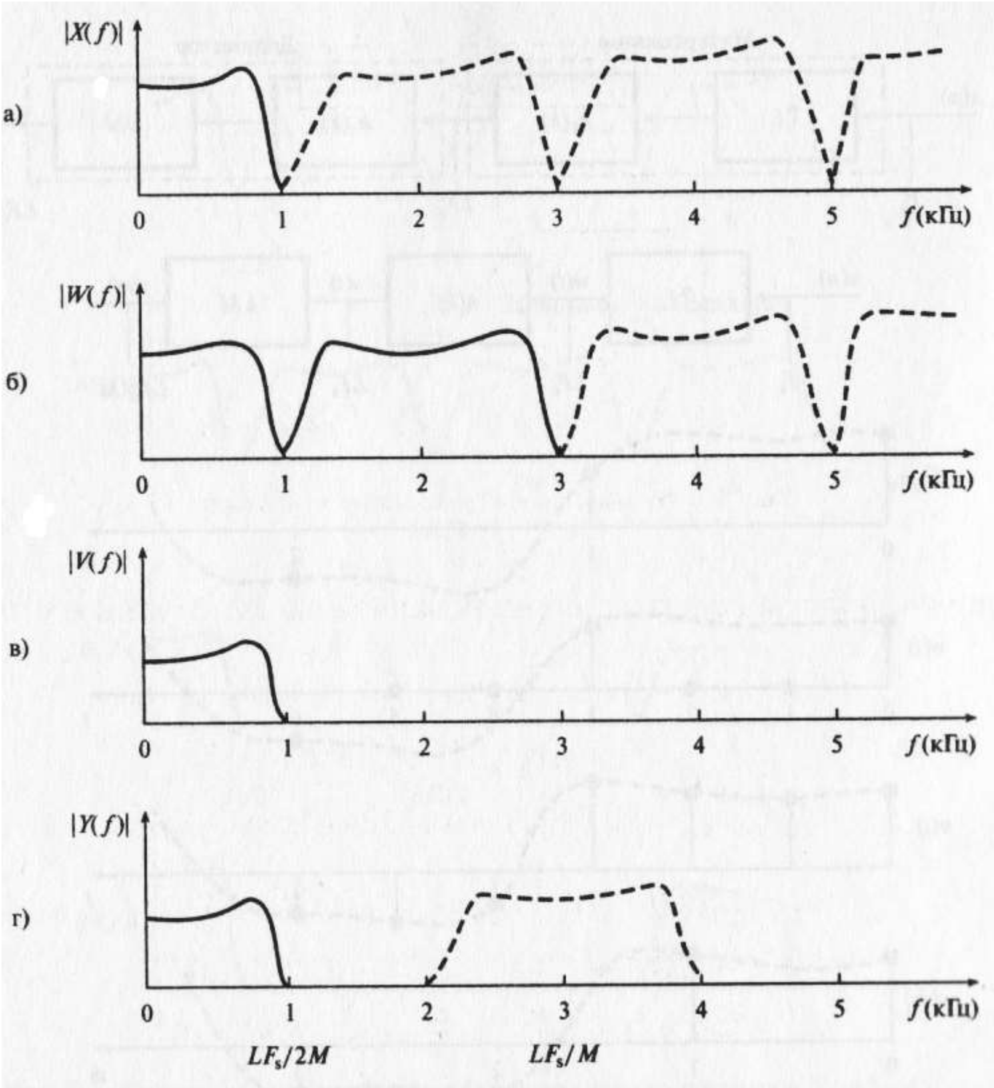


Рис. 6.3.3. Спектральная интерпретация увеличения частоты дискретизации с 2 кГц в 3/2 раза.

Входной сигнал $x(n)$ с частотой дискретизации 2 кГц вначале ускоряется в 3 раза до 6 кГц, фильтруется с целью устранения зеркальных частот, которые иначе вызвали бы наложение, а затем замедляются в два раза до частоты 3 кГц.

Контрольные вопросы по многоскоростной обработке сигналов
(лекции 15 и 22 апреля 2019 г.)

1.Какие системы называют многоскоростными?
2.Какое преобразование выполняется системой однократной интерполяции?
3.Какое преобразование выполняется системой однократной децимации?
4.Какое преобразование выполняется системой однократной передискретизации?
5.Какие многоскоростные системы называют однократными?
6.Какие многоскоростные системы называют многократными?
7.Что собой представляет многократная система преобразования частоты?
8.Какие блоки включает в себя система однократной интерполяции?
9.Какая обработка выполняется каждым из блоков?
10.Поясните интерпретацию процедуры интерполяции во временной области.
11.Поясните интерпретацию процедуры интерполяции в частотной области.

12.Какие блоки включает в себя система однократной децимации?
13.Какая обработка выполняется каждым из блоков?
14.Поясните интерпретацию процедуры децимации в частотной области.
15.Поясните интерпретацию процедуры децимации во временной области.
16.Какие блоки включает в себя система однократной передискретизации?
17.Какие фильтры ФНЧ рекомендуется использовать в системах интерполяции, децимации и передискретизации для исключения влияния фазовых искажений?
18.Какой вид имеет идеальная АЧХ фильтра для системы однократной интерполяции?
19.Какой вид имеет идеальная АЧХ фильтра для системы однократной децимации

1. Солонина, А. И. Цифровая обработка сигналов и MATLAB: учеб. пособие / А. И. Солонина, Д. М. Клионский, Т. В. Меркучева, С. Н. Перов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2013. — 512 с.: ил.— (Учебная литература для вузов)
2. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: пер. с англ. 2008.

Примеры решения задач на цифровые фильтры

1. Разностное уравнение фильтра

$$y(k+2)-\frac{1}{6}y(k+1)-\frac{1}{6}y(k)=2x(k), \qquad y(0)=0, \quad y(1)=1.$$

Найти отклик на сигнал $x(k)=\sigma(k)$.

По теореме опережающего сдвига

$$y(k+1)\leftrightarrow z\left[Y(z)-y(0)\right]=z\cdot Y(z);$$
$$y(k+2)\leftrightarrow z\left[zY(z)-y(1)\right]=z\left[zY(z)-1\right].$$

Исходное уравнение в терминах z- преобразования преобразуется к виду

$$z\left[zY(z)-1\right]-\frac{1}{6}zY(z)-\frac{1}{6}Y(z)=2X(z). \qquad \text{(a)}$$

Так как

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{(z-1)},$$

то уравнение (a) будет

$$z^2Y(z)-z-\frac{1}{6}zY(z)-\frac{1}{6}Y(z)=\frac{2z}{(z-1)}.$$

Поэтому

$$Y(z)=\frac{z^2+z}{(z-1)\left(z^2-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}\right)}=\frac{z^2+z}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}=$$
$$=\frac{z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\frac{z^{-1}}{6}-\frac{z^{-2}}{6}\right)}.$$

Находим

$k_1 = 3$ – вычет в точке z=1; $k_2 = -1{,}8$ – вычет в точке z=$\frac{1}{2}$; $k_3 = -0{,}2$ – вычет в точке z=$-\frac{1}{3}$.

Разложим $Y(z)$ на простые дроби

$$Y(z) = \frac{3}{1-z^{-1}} - \frac{1{,}8}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{0{,}2}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

С учетом того, что

$$a^k \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$$

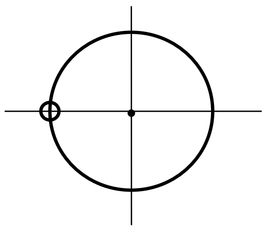
получаем

$$y(k) = 3 - 1{,}8\left(\frac{1}{2}\right)^k - 0{,}2\left(-\frac{1}{3}\right)^к. \quad \square$$

2. Передаточная функция фильтра

$$H(z) = 1 - az^{-1} = \frac{z-a}{z} \quad \text{при } a=-1 \quad \text{получаем } H(z) = 1 + z^{-1} = \frac{z+1}{z}.$$

Картины нулей и полюсов:

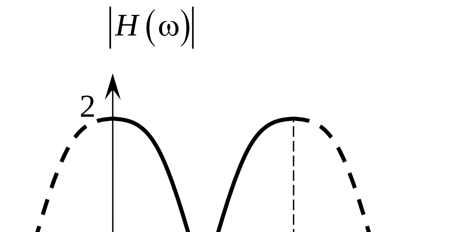


3.

Частотная характеристика фильтра получается подстановкой в передаточную функцию значения $\mathrm{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\Delta \mathrm{t}}$

$$\mathrm{H}(\omega) = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\Delta\mathrm{t}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\Delta\mathrm{t}/2}\, 2\cos\frac{\omega\Delta\mathrm{t}}{2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi\frac{\omega}{\omega_д}}\, 2\cos\pi\frac{\omega}{\omega_д}.$$

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики фильтра



4.

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\omega\Delta t/2, & 0 \le \frac{\omega}{\omega_д} < 1/2 \\ \pi - \omega\Delta t/2, & 1/2 \le \frac{\omega}{\omega_д} < 1 \end{cases}$$

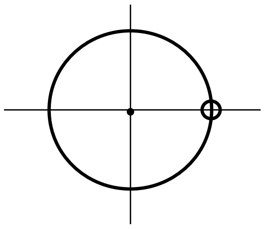
5

Это фильтр низких частот.

3. Передаточная функция фильтра

$$H(z)=1-az^{-1}=\frac{z-a}{z} \quad \text{при } a=1 \quad \text{получаем } H(z)=1-z^{-1}=\frac{z-1}{z}.$$

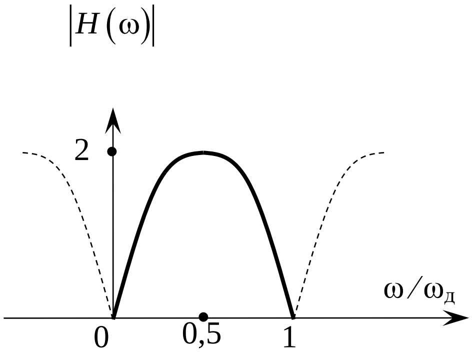
Картины нулей и полюсов

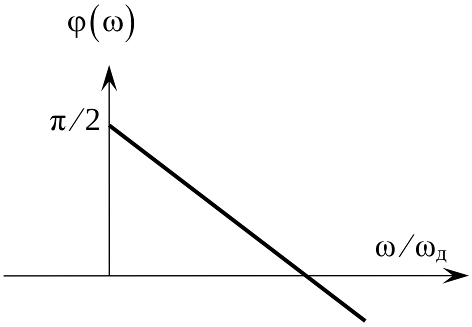


Частотная характеристика фильтра получается подстановкой в передаточную функцию значения $z=e^{j\omega\Delta t}$

$$H(\omega)=1-e^{-j\omega\Delta t}=e^{-j\omega\Delta t/2}\,2j\sin\frac{\omega\Delta t}{2}=e^{-j\left[\omega\Delta t/2-\frac{\pi}{2}\right]}\cdot 2\sin\frac{\omega\Delta t}{2}=2e^{-j\left[\omega\Delta t/2-\frac{\pi}{2}\right]}\cdot\sin\frac{\omega}{\omega_д}$$

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики фильтра





Это фильтр высоких частот.

Из двух последних примеров видно, что линейная фазовая характеристика соответствует полюсу или нулю передаточной функции, лежащему на единичной окружности.