2.7. Представление сигналов в комплексной форме

На рис. 2.7.1 представлена типовая блок-схема устройства обработки сигналов (УОС) в радиолокации, цифровой радиосвязи, телекоммуникационных системах и т. д. Устройство содержит аналоговую часть и цифровой процессор сигналов.

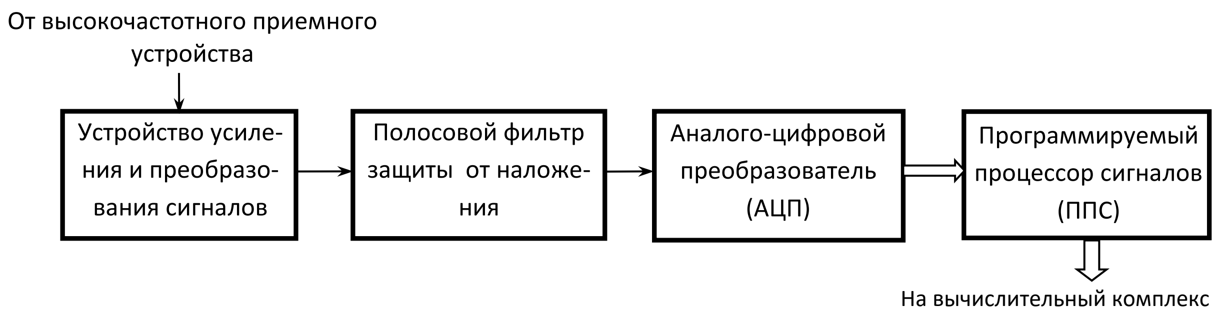


Рис. 2.7.1. Блок-схема устройства обработки сигналов (УОС)

Аналоговая часть включает в себя каскады управляемого усиления, полосовой фильтр для формирования полосы частот обрабатываемых сигналов и соблюдения условий *теоремы Котельникова*, а также аналого-цифровой преобразователь (АЦП). АЦП формирует цифровые отсчёты сигналов, т.е. выполняет дискретизацию сигналов по времени и квантование отсчётов по уровню. Благодаря ограничению полосы частот возникающее после АЦП повторение спектра происходит без заметного наложения. Однако «*эффект наложения*» принципиально неустраним, его можно только ослабить соответствующим выбором аналогового фильтра. Для дальнейшего важно отметить, что «эффект наложения» понижает динамический диапазон. Несмотря на то, что основная обработка производится в ППС, аналоговый блок является весьма ответственным узлом, определяющим многие важные характеристики устройства в целом, такие, как *чувствительность, динамический диапазон, максимальная полоса частот* обрабатываемых сигналов. Более того, на сегодняшнем уровне развития элементной базы именно эта часть аппаратуры ограничивает предельно достижимые характеристики УОС. Качество аналого-цифрового преобразования оказывает значительное влияние на алгоритмы, используемые при дальнейшей цифровой обработке. Поэтому аналоговый блок и ППС целесообразно проектировать совместно, оптимизируя характеристики всего УОС.

Принципиальным является способ построения аналого-цифрового преобразователя (АЦП). От этого зависит выбор эффективного алгоритма при дальнейшей обработке в ППС. Различные методы построения АЦП соответствуют различным способам представления сигналов. Можно выделить два основных способа представления: действительное и комплексное. Отметим, что все физические сигналы являются действительными функциями времени. Комплексное представление удобно использовать при рассмотрении полосовых радиосигналов, вопросов модуляции. Представление сигналов в комплексной форме в свою очередь разделяется на два: одно связано с формированием квадратурных компонент сигнала, другое – с формированием аналитического сигнала с помощью преобразователя Гильберта.

Представление узкополосных радиосигналов в комплексной форме.

Комплексная огибающая

Рассмотрим узкополосный сигнал, у которого спектр ограничен полосой частот $|f| \in [f_0 - f_в,\ f_0 + f_в]$, причем $f_0 >> 2f_в$ (рис. 2.7.2).

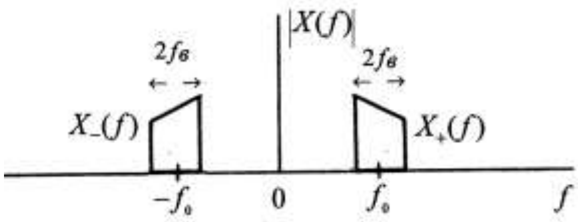


Рис. 2.7.2

Здесь $X_+(f)$ и $X_-(f)$ прямой и инверсный спектры сигнала соответственно. Наиболее общая форма записи такого сигнала имеет вид

$$x(t) = A(t)\cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)], \qquad (2.7.1)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ – медленно меняющиеся по сравнению с циклическим множителем функции времени. Гармонический сигнал (косинусоида с постоянной частотой f_0 и начальной фазой φ_0) подвергается одновременно амплитудной и фазовой модуляции. Узкополосные сигналы можно считать квазигармоническими – их амплитуда и фаза медленно изменяются во времени по сравнению с $\cos[2\pi f_0 t$.

В соответствии с теоремой Котельникова для такого сигнала необходимая частота дискретизации

$$f_д = 2(f_0 + f_в)$$

может оказаться очень высокой (за пределами быстродействия аналого-цифрового преобразователя). Равномерная дискретизация с шагом $\Delta t = 1/4f_в$ оказывается недостаточной, т. к. составляющие $X_+(f)$ и $X_-(f)$ при периодическом продолжении с периодом $f_д = 4f_в$ будут налагаться друг на друга, в результате частичные спектры будут отличаться от исходного и точное восстановление сигнала по его дискретным отсчетам становится невозможным. Тем не менее для полосовых сигналов существуют методы дискретизации с частотой $4f_в$, которые позволяют сохранить информацию, необходимую для восстановления исходного сигнала. Дальнейшее изложение основывается на комплексном представлении сигналов.

Комплексное представление полосовых сигналов является прямым развитием известного символического метода, позволяющего представлять гармоническое колебание как действительную или мнимую часть комплексной функции:

$$A\cos[2\pi f_0 t + \varphi_0] = \mathrm{Re}(Ae^{j\varphi_0}e^{j2\pi f_0 t}),$$
$$A\sin[2\pi f_0 t + \varphi_0] = \mathrm{Im}(Ae^{j\varphi_0}e^{j2\pi f_0 t}).$$

Величину $Ae^{j\varphi_0}$ называют комплексной амплитудой гармонического колебания.

В соответствии с (2.7.1) полосовой радиосигнал представляет собой сложное колебание, получающееся из гармонического сигнала с частотой f_0 при одновременной его модуляции как по амплитуде, так и по фазе. Мы попытаемся корректно распространить символический метод на такие колебания. Для этого (2.7.1) представим в виде

$$x(t) = x_c(t)\cos 2\pi f_0 t - x_s(t)\sin 2\pi f_0 t. \tag{2.7.2}$$

Здесь

$$x_c(t) = A(t)\cos\varphi(t) \text{ и } x_s(t) = A(t)\sin\varphi(t) \tag{2.7.3}$$

называются ***квадратурными составляющими*** узкополосного колебания $x(t)$, соответственно $x_c(t)$ − синфазная, а $x_s(t)$ − квадратурная компоненты. Квадратурные составляющие являются низкочастотными действительными функциями и несут всю информацию о модуляции сигнала. Спектры этих функций сконцентрированы возле начала координат в полосе $2f_в$.

Квадратурные компоненты могут быть получены в следующей схеме.

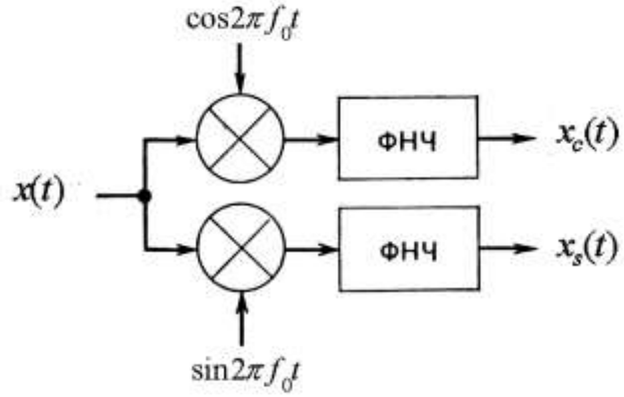


Рис. 2.7.3. Получение квадратурных компонент узкополосного колебания

Действительно, после умножения на сигнал когерентного гетеродина в верхнем канале имеем

$$x(t)\cos 2\pi f_0 t = (1/2)[x_c(t)\cos 2\pi 2 f_0 t - x_s(t)\sin 2\pi 2 f_0 t] + 1/2 x_c(t).$$

Высокочастотные составляющие вблизи $2f_0$ подавляются фильтром нижних частот (ФНЧ) и на выходе верхнего канала остается синфазная компонента $x_c(t)$. Аналогично в нижнем канале выделяется квадратурная компонента $x_s(t)$.

В реальных формирователях квадратур предъявляются очень высокие требования к идентичности, линейности и стабильности амплитудных характеристик каналов, а также к точному соблюдению 90° сдвига фаз между гармоническими колебаниями когерентного гетеродина.

Амплитудную и фазовую модуляции сигнала $x(t)$ можно определить с помощью квадратурных компонент. Из (2.7.3) имеем

$$\begin{aligned} A(t) &= \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}, \\ \varphi(t) &= \operatorname{arctg}\frac{x_s(t)}{x_c(t)}. \end{aligned} \tag{2.7.4}$$

Ветвь арктангенса выбирается таким образом, чтобы $\varphi(t)$ была непрерывной функцией времени.

Введём ***комплексную огибающую***

$$\gamma(t) = x_c(t) + jx_s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}. \tag{2.7.5}$$

Эта функция содержит всю обусловленную модуляцией информацию. При этом физическая огибающая равна

$$A(t) = |\gamma(t)|.$$

Полная фаза узкополосного колебания

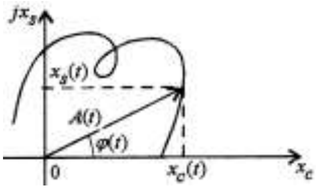
$$\psi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(t),$$

а мгновенная частота определяется как производная по времени от полной фазы:

$$f(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{x_s}{x_c} = \\ = f_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{x_s' x_c - x_c' x_s}{x_c^2 + x_s^2}. \qquad (2.7.6)$$

Комплексную огибающую можно представить на комплексной плоскости вектором, который совершает некоторое сложное движение, изменяясь как по модулю, так и по направлению (рис. 2.7.4). Исходный действительный сигнал $x(t)$ связан с комплексной огибающей $\gamma(t)$ соотношением

$$x(t) = \mathrm{Re}[\gamma(t)\, e^{j2\pi f_0 t}]. \qquad (2.7.7)$$



Таким образом, понятие комплексной огибающей обобщает понятие комплексной амплитуды на случай узкополосных радиосигналов.

Рис. 2.7.4

Спектр комплексной огибающей

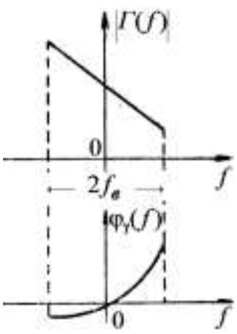
Полосовой сигнал $x(t)$ вида (2.7.1) является действительной функцией времени, поэтому для его спектральной функции имеет место

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = |X(f)| e^{j\varphi_x(f)},$$

$X(f) = X^*(-f) -$ свойство комплексной сопряжённости, причём

$$|X(f)| = |X(-f)|,\ \varphi_x(-f) = -\varphi_x(f),$$

т. е. амплитудный спектр сигнала является чётной функцией частоты, а фазовый – нечётной функцией (рис. 2.7.5).



Преобразование Фурье комплексной огибающей этого сигнала

$$\Gamma(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) e^{-j2\pi f t} dt = |\Gamma(f)| e^{j\varphi_\gamma(f)}.$$

Умножение $\gamma(t)$ на $e^{j2\pi f_0 t}$ означает смещение спектра $\gamma(t)$ вправо на величину f_0 (теорема смещения для преобразования Фурье).

Рис. 2.7.5.

С учётом этого и выражения (2.7.7) имеем

$$X(f) = \frac{1}{2}\Gamma(f - f_0) + \frac{1}{2}\Gamma^*[-(f + f_0)]. \qquad (2.7.8)$$

Отсюда прямой и инверсный спектры сигнала будут

$$X_{+}(f)=\frac{1}{2}\Gamma(f-f_0),$$
$$X_{-}(f)=\frac{1}{2}\Gamma^{*}[-(f+f_0)]. \qquad (2.7.9)$$

Амплитудный спектр $|\Gamma(f)|$ и фазовый спектр $\varphi_{\gamma}(f)$ комплексной огибающей $\gamma(t)$ полосового сигнала изображены на рис. 2.7.5. Можно отметить несимметричность амплитудного спектра комплексной огибающей на интервале $[-f_в,\ f_в]$.

Лекция 24 сентября 2018 г. Задачи для самостоятельного решения

1. Для сигнала $x(t)=A\sin 2\pi f_0 t\,\mathrm{sgn}t$ написать выражение для комплексной огибающей.

2. Сигнал $x(t)$ как при $t<0$, так и при $t>0$ представляет собой гармоническое колебание. В момент времени $t=0$ фаза сигнала изменяется скачком на π. Написать выражение для комплексной огибающей этого сигнала.

Аналитический сигнал. Преобразование Гильберта

Рассмотрим еще один распространенный способ комплексного представления действительных колебаний. Построим ***аналитический сигнал***

$$x_A(t)=\mathrm{Re}\left[x_A(t)\right]+j\,\mathrm{Im}\left[x_A(t)\right], \qquad (2.7.10)$$

у которого

$$\mathrm{Re}\left[x_A(t)\right]=x(t), \qquad (2.7.11)$$

$$\text{ПФ}\left[x_A(t)\right]=X_A(f)=\begin{cases}2X_{+}(f), & f>0,\\ 0, & f<0,\end{cases} \qquad (2.7.12)$$

т. е. вещественная часть равна исходному действительному сигналу, а спектр содержит только положительные частоты. Нетрудно видеть, что

$$X_A(f)=X(f)+X(f)\,\mathrm{sgn}\,f, \qquad (2.7.13)$$

где

$$\mathrm{sgn}\,f=\begin{cases}1, & f>0,\\ -1, & f<0.\end{cases}$$

Учитывая, что $\text{ПФ}\left[\mathrm{sgn}f\right]=j/\pi t,$ из (2.7.13) имеем

$$x_A(t)=\text{ПФ}\left[X_A(f)\right]=\text{ПФ}\left[X(f)\right]+\text{ПФ}\left[X(f)\mathrm{sgn}\,f\right]=$$
$$=x(t)+j\left[x(t)\otimes(1/\pi t)\right]. \qquad (2.7.14)$$

Свёртка

$$x(t)\otimes(1/\pi t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau=x_{\Gamma}(t) \qquad (2.7.15)$$

по определению есть *преобразование Гильберта* функции $x(t)$.

Таким образом, аналитический сигнал со спектром (2.7.12) будет

$$x_A(t)=x(t)+jx_{\Gamma}(t), \qquad (2.7.16)$$

где $x_{\Gamma}(t)$ определяется из (2.7.15) т. е.

$$x_{\Gamma}(t)=x(t)\otimes(1/\pi t)\Leftrightarrow X_{\Gamma}(f)=-jX(f)\mathrm{sgn}\,f. \qquad (2.7.17)$$

Из этого выражения вытекает ещё одна связь между спектрами:

$$X(f) = jX_\Gamma(f)\operatorname{sgn} f,$$

из которой следует *обратное преобразование Гильберта*:

$$x(t) = x_\Gamma(t) \otimes (-1/\pi t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_\Gamma(t)}{t-\tau}d\tau. \tag{2.7.18}$$

Замечание. Выражение под интегралом (2.7.15) и (2.7.18) имеет особую точку $\tau = t,$ поэтому интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)d\tau}{t-\tau} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{t-\varepsilon}\frac{x(\tau)d\tau}{t-\tau} + \int_{t+\varepsilon}^{\infty}\frac{x(\tau)d\tau}{t-\tau}\right].$$

Некоторые свойства преобразования Гильберта

Отметим, прежде всего, свойство *линейности* этого интегрального преобразования, в чём легко можно убедиться непосредственно из (2.7.15) и (2.7.18).

Выражению (2.7.14) можно дать следующую интерпретацию: преобразованный по Гильберту сигнал получается пропусканием исходного действительного сигнала через фильтр с импульсной характеристикой $1/\pi t$ (с частотной характеристикой $-j\operatorname{sgn} f$), как показано на рис. 2.7.6. Такой фильтр осуществляет сдвиг по фазе всех гармонических компонент сигнала в сторону отставания на $90°$.

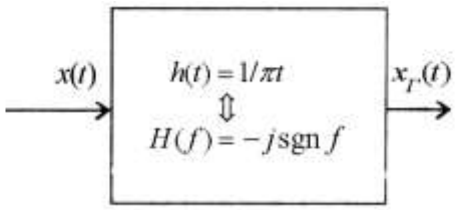


Рис. 2.7.6. Преобразователь Гильберта

Действительно, легко проверить, что для $x(t) = \cos 2\pi ft$ имеем $x_\Gamma(t) = \sin 2\pi ft,$ а для $x(t) = \sin 2\pi ft$ имеем $x_\Gamma(t) = -\cos 2\pi ft.$ Следовательно, если

$$x(t) = \sum_n (a_n \cos 2\pi f_n t + b_n \sin 2\pi f_n t),$$

то

$$x_\Gamma(t) = \sum_n (a_n \sin 2\pi f_n t - b_n \cos 2\pi f_n t).$$

Такие колебания называются *сопряжёнными по Гильберту.*

Для произвольных сигналов преобразователь Гильберта нереализуем, т.к. его импульсная характеристика не является каузальной. Однако его можно реализовать приближённо с некоторой задержкой t_0, если отбросить ветви $h(t)$ левее точки $t = -t_0$ и правее точки $t = t_0$ и сдвинуть $h(t)$ вправо на t_0. Погрешности преобразования, связанные с таким усечением импульсной характеристики, могут быть значительными. Кроме того, задержка сигнала на t_0 должна быть учтена при работе преобразователя с другими устройствами. Нереализуемость преобразователя Гильберта объяснить можно также тем, что сдвиг фаз на $-\pi/2$ для всех компонент сигнала практически не может быть выполнен точно. Для узкополосных радиосигналов такая операция выполняется тем точнее, чем уже полоса, т. е. чем сильнее неравенство $f_0 > 2f_в$.

Из (2.7.2) и (2.7.7) имеем

$$x(t) = x_c(t)\cos 2\pi f_0 t - x_s(t)\sin 2\pi f_0 t = \mathrm{Re}[\gamma(t)e^{j2\pi f_0 t}].$$

Умножение $\gamma(t)$ на $e^{j2\pi f_0 t}$ означает перенос спектра $\gamma(t)$ вправо на величину f_0. При достаточной узкополосности сигнал $\gamma(t)e^{j2\pi f_0 t}$ будет иметь односторонний спектр с положительными частотами и может рассматриваться как аналитический. Поэтому сопряжённый по Гильберту сигнал

$$x_\Gamma(t) = \mathrm{Im}[\gamma(t)e^{j2\pi f_0 t}] = x_c(t)\sin 2\pi f_0 t + x_s(t)\cos 2\pi f_0 t =$$
$$= x_c(t)\cos(2\pi f_0 t - \pi/2) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t - \pi/2).$$

Сравнивая выражения для $x(t)$ и $x_\Gamma(t)$, видим, что при $f_0 >> 2f_в$ преобразование Гильберта выполняется над $\cos 2\pi f_0 t$ и $\sin 2\pi f_0 t$, а квадратурные компоненты $x_c(t)$ и $x_s(t)$ остаются неизменными.

Ядро преобразования Гильберта является нечётной функцией аргумента τ относительно точки $\tau = t$. Следовательно, сигнал, сопряжённый к константе, тождественно равен нулю:

$$x_\Gamma(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{const}}{t-\tau}d\tau = 0.$$

Следствием этого является следующее важное свойство преобразования Гильберта: если сигнал $x(\tau)$ достигает экстремума при каком-то $\tau = t$, то в окрестности этой точки сопряжённый сигнал $x_\Gamma(t)$ проходит через нуль. Это объясняется тем, что в окрестности экстремума сигнал является чётной функцией.

Возьмём спектр аналитического сигнала и сдвинем его так, чтобы он оказался сконцентрированным около нулевой частоты:

$$\Gamma(f) = X_A(f + f_0). \qquad (2.7.19)$$

Этому спектру соответствует колебание

$$\gamma(t) = x_A(t)\exp(-j2\pi f_0 t),$$

которое называется *комплексной огибающей* действительного сигнала $x(t)$. Следовательно:

$$x_A(t) = \gamma(t)\exp(j2\pi f_0 t) \quad \text{и} \qquad (2.7.20)$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[\gamma(t)\exp(j2\pi f_0 t)\right]. \qquad (2.7.21)$$

Во многих случаях частоту f_0 выбрать нетрудно. Например, для узкополосного сигнала (2.7.1) за f_0 принимается частота немодулированного несущего колебания. В этом случае

$$|x_A(t)| = \sqrt{x^2(t) + x_\Gamma^2(t)}$$

при достаточной узкополосности совпадает с

$$A(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}.$$

В других случаях f_0 выбирается так, чтобы минимизировать ширину полосы $\Gamma(f)$. Один из способов состоит в выборе f_0 «центра тяжести» положительной функции $|X_A(f)|^2$. Такое f_0 минимизирует величину

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f - f_0)^2 \left| X_A(f) \right|^2 df.$$

Рис. 2.7.7 поясняет взаимосвязь спектров действительного полосового сигнала, соответствующего аналитического сигнала и комплексной огибающей.

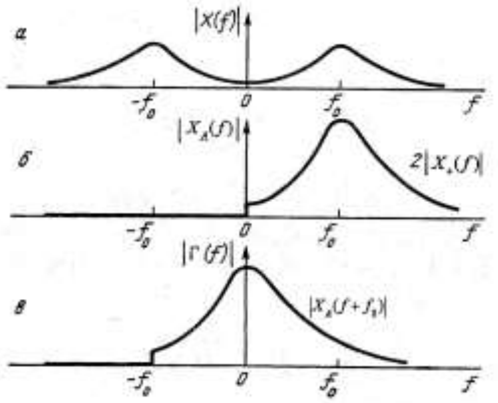
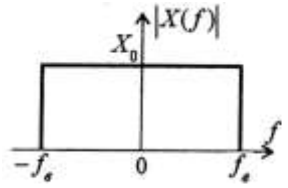


Рис. 2.7.7. Спектры: *а* – полосового сигнала; *б* – аналитического сигнала; *в* – комплексной огибающей

Пример 1. Рассмотрим действительный низкочастотный сигнал $x(t)$ со спектром $X(f)$, показанным на рисунке.



Соответствующий аналитический сигнал имеет спектр

$$X_A(f) = \begin{cases} 2X_+(f), & f > 0, \\ 0, & f < 0, \end{cases}$$

поэтому

$$x_A(t) = 2X_0 \int_0^{f_в} e^{j2\pi ft} df = \frac{X_0}{j\pi t}(e^{j2\pi f_в t} - 1).$$

Отсюда

$$x(t) = \mathrm{Re}[x_A(t)] = X_0 2 f_в \sin 2\pi f_в t / 2\pi f_в t,$$

$$x_Г(t) = \mathrm{Im}[x_A(t)] = X_0 2 f_в \sin^2(\pi f_в t)/(\pi f_в t).$$

На рис. 2.7.8 приведены графики этих сигналов, нормированных по амплитуде. Следует отметить, что сопряжённый сигнал обращается в нуль в точке, где исходный сигнал достигает максимального значения.

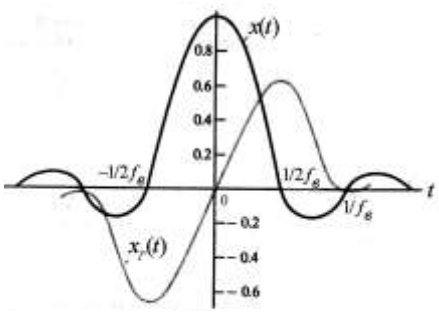
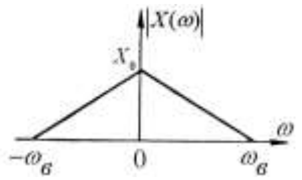


Рис. 2.7.8. Исходный и сопряжённый сигналы

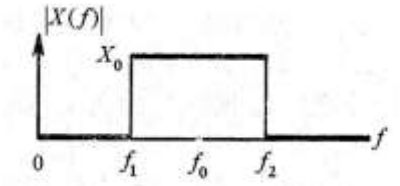
Лекция 1 октября 2018 г. Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что квадратурные компоненты $x_c(t)$ и $x_s(t)$ сопряжены по Гильберту лишь при условии, что они соответствуют аналитическому сигналу $x(t)$, содержащему только положительные частоты.

2. Сигнал $x(t)$ является суммой двух гармонических компонент $x(t) = A_1 \cos\omega_1 t + A_2 \cos\omega_2 t.$ Найти сопряжённый по Гильберту сигнал, аналитический сигнал, физическую огибающую, полную фазу, мгновенную частоту.



3. Сигнал $x(t)$ имеет финитный спектр $X(\omega)$, показанный на рисунке слева. Найти соответствующий аналитический сигнал. Изобразить его действительную и мнимую части.



4. Найти аналитический сигнал $x_A(t)$, соответствующий колебанию, спектр которого отличен от нуля лишь на отрезке $f_1 \le f \le f_2$ при $f > 0$.

5. Пусть $x_Г(t)$ преобразованный по Гильберту сигнал $x(t)$. Показать, что $x_Г(t)$ и $x(t)$ ортогональны, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) x_Г^*(t)\, dt = 0,$$

Для студентов, желающих принять участие в составлении и издании сборника задач по ЦОС информация на сайте:

-кафедра радиоэлектроники и прикладной информатики **kprf.mipt.ru**

-учебные курсы;

-основы цифровой обработки сигналов;

-избранные лекции 2018;

-правила представления и оформления материалов (pdf)