

Глава 3. Дискретизация случайных сигналов

В этой главе остановимся на следующих важных разделах:

1. Случайные процессы (краткое напоминание).
2. Дискретизация случайных сигналов. Теорема Котельникова.
3. Комплексная огибающая узкополосного радиосигнала.
4. Корреляционная функция узкополосного сигнала. Функция неопределенности.
5. Согласованная фильтрация.

1.1. Случайные процессы

В физических системах источники сигналов способны вырабатывать одну из большого множества возможных функций времени $x(t)$. Поэтому удобно ввести вероятностный закон, описывающий случайные появления каждого элемента такого множества. Множество вместе с законом вероятности задаёт *ансамбль сигналов*, вырабатываемых источником.

Случайный процесс $X(t)$ представляет собой ансамбль выборочных функций времени, подчиняющихся некоторой общей статистической закономерности. Каждая из функций этого ансамбля называется *реализацией* случайного процесса (рис. 1.1).

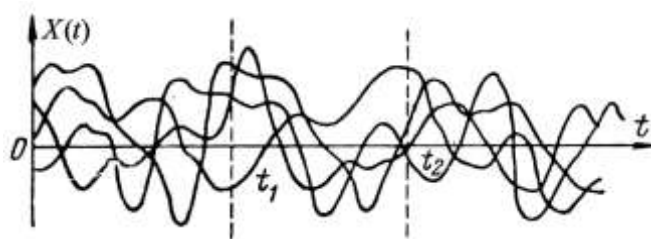


Рис. 1.1

Случайный сигнал можно рассматривать как функцию двух аргументов:

$$x(a, t), \quad a \in \Omega, \quad t \in T.$$

Первый аргумент a является элементарным событием и принадлежит пространству Ω элементарных событий с заданной на нем вероятностной мерой. Это так называемое *выборочное пространство*. Второй аргумент t имеет обычно смысл времени и принадлежит множеству T . Аргумент t может быть непрерывным или дискретным. В соответствии с этим $x(a, t)$ – непрерывный или дискретный сигнал. В обоих случаях T может быть конечным или бесконечным. Функция, происходящая из Ω , обозначается как $x(a, t)$, однако проще обозначать её как $x(t)$, имея всегда ввиду то, что конкретной реализации $x(t)$ соответствует точка в выборочном пространстве Ω .

В пространстве функций времени (гильбертовом пространстве L_2) отдельная реализация $x(t)$ есть вектор.

Когда мы наблюдаем значения случайного процесса на определённом промежутке T , мы имеем дело лишь с одной реализацией случайного процесса. Случайность процесса $X(t)$ проявляется в том, что вид наблюдаемой функции случайным образом меняется от одного наблюдения к другому. Однако каждая отдельная реализация $x(t)$ не случайна.

Чаще всего реализации случайного процесса представляются функциями со сложным нерегулярным во времени поведением, как показано на рис. 1.1, но это не общее правило. Иногда

рассматриваются случайные процессы, образованные, например, гармоническими сигналами $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, у которых один из трёх параметров A , ω , φ – случайная величина, принимающая определённое значение в каждой реализации (рис. 1.2).

Случайные процессы, реализации которых зависят от конечного числа параметров, называются *квазидетерминированными*.

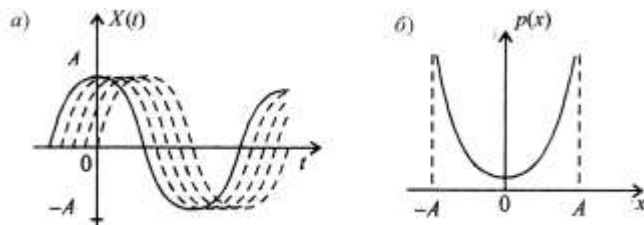


Рис. 1.2. Гармонический сигнал со случайной начальной фазой,
а – реализации; б – плотность вероятности

Наблюдая ансамбль $X(t)$ в любой момент времени t_1 , приходим к случайной величине $x(t_1) = x_1$. Если рассматривать ряд моментов времени $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$ на интервале наблюдения процесса, то им соответствует N случайных величин $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$.

Другая точка зрения заключается в том, что случайный процесс трактуется как *совокупность (последовательность) случайных значений*, каждое из которых относится к своему моменту времени:

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{x}(t); t \in T\}.$$

Если T – счётное множество (конечное или бесконечное), то $X(t)$ – процесс с дискретным временем, если T – вещественный интервал, то $X(t)$ – процесс с непрерывным временем.

Полное задание процесса предполагает задание совместной плотности вероятности $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ для любого конечного N . Этот способ задания для произвольного процесса имеет практические трудности.

Частичное задание процесса возможно различными способами. Рассмотрим два наиболее распространённых: задание одномерной плотности и задание двумерной плотности.

В первом случае задаётся только $p(\mathbf{x}, t_k)$ – одномерная плотность вероятности случайной величины $\mathbf{x}(t_k)$, относящаяся к одному моменту времени $t = t_k$ (одному сечению процесса). Задание одномерной плотности позволяет произвести статистическое усреднение (усреднение по ансамблю) как самой величины $\mathbf{x}$, так и любой функции $f(\mathbf{x})$. Для практических приложений важными являются следующие параметры случайного процесса $X(t)$:

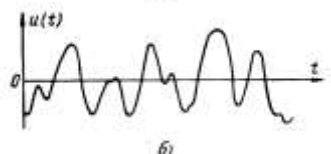


математическое ожидание

$$m_x(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) = M[\mathbf{x}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x} p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}; \quad (1.1)$$

дисперсия

$$\sigma_x^2(t) = M\{[\mathbf{x}(t) - m_x(t)]^2\}. \quad (1.2)$$



Среднее значение определяет «центр тяжести» распределения в каждый момент времени t . Дисперсия является мерой разброса относительно центра тяжести также в каждый момент времени t .

Рис. 1.3. Флуктуационный процесс: а – с постоянной составляющей; б – со средним значением, равным нулю.

Более полной вероятностной характеристикой процесса является двумерная плотность вероятности $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t_1, t_2)$, определяющая связь значений $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2)$, принимаемых случайной функцией $X(t)$ в произвольно выбранные моменты времени t_1 и t_2 (рис. 1.1). Имея дело с парами случайных значений процесса в разнесённые моменты t_1 и t_2 , удобно ввести так называемую *корреляционную функцию* случайного процесса (или второй смешанный момент):

$$R_X(t_1, t_2) = M[\mathbf{x}(t_1) \cdot \mathbf{x}(t_2)]. \quad (1.3)$$

В соответствии с этим определением корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ представляет собой усреднённое по ансамблю произведение значений случайной функции $X(t)$ в моменты времени t_1 и t_2 . Для каждой реализации $x(t)$ случайного процесса произведение $x(t_1) \cdot x(t_2)$ является некоторым числом. Ансамбль реализаций образует множество случайных чисел, распределение которых характеризуется двумерной плотностью вероятности $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t_1, t_2)$. При заданной функции $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t_1, t_2)$ усреднение по ансамблю в (1.3) можно выполнить по формуле

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t_1, t_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \quad (1.4)$$

При нулевом расстоянии между моментами t_1 и t_2 корреляционная функция определяет величину среднего квадрата случайного процесса при $t = t_1$:

$$R_X(t_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_1^2 p(\mathbf{x}_1; t_1) d\mathbf{x}_1 = M[\mathbf{x}^2(t)]. \quad (1.5)$$

Замечание. Для комплексного случайного процесса $X(t)$ корреляционная функция определяется следующим образом:

$$R_X(t_1, t_2) = M[\mathbf{x}(t_1) \cdot \mathbf{x}^*(t_2)]. \quad (1.6)$$

В этом случае корреляция связана со скалярным произведением в комплексном линейном пространстве.

Корреляционная функция центрированного случайного процесса называется *ковариационной функцией*:

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= M\{[\mathbf{x}(t_1) - \bar{\mathbf{x}}(t_1)][\mathbf{x}(t_2) - \bar{\mathbf{x}}(t_2)]\} = \\ &= R_X(t_1, t_2) - \bar{\mathbf{x}}(t_1)\bar{\mathbf{x}}(t_2). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Отсюда видно, что $K_X(t, t)$ есть дисперсия процесса. Как средний квадрат, так и дисперсия в общем случае зависят от времени.

1.2. Стационарность и эргодичность

В практических приложениях важное место занимают *стационарные* случайные процессы. Различают стационарность в узком и широком смысле.

Случайный процесс называется *стационарным в узком смысле* (строго стационарным), если его плотность вероятности

$$p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

произвольного порядка n зависит только от интервалов $t_2 - t_1, t_3 - t_1, \dots, t_n - t_1$ и не зависит от начала отсчета времени.

В приложениях обычно ограничиваются требованием независимости от начала отсчета времени только одномерного и двумерного законов распределения. В этом случае процесс называется *стационарным в широком смысле*. Выполнение этого условия позволяет считать, что сред-

нее значение и дисперсия случайного процесса не зависят от времени, а корреляционная функция зависит только от интервала между отсчетами $\tau = t_2 - t_1$.

Таким образом, для случайного процесса, стационарного в широком смысле, выражения (1.1) – (1.6) записываются без обозначения фиксированных моментов времени:

$$m_x = \bar{x} = M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx; \quad (2.1)$$

$$\sigma_x^2 = M[x - m_x]^2; \quad (2.2)$$

$$R_x(\tau) = M[x(t) \cdot x(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) \cdot x(t + \tau) p(x, x_t, \tau) dx dx_t] \quad (2.3)$$

– четная функция;

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \overline{x^2}; \quad (2.4)$$

$$K_x(\tau) = M[(x(t) - m_x) \cdot (x(t + \tau) - m_x)] = R_x(\tau) - m_x^2. \quad (2.5)$$

Корреляционная функция $R_x(\tau)$ является показателем того, насколько сохраняется форма случайного процесса $X(t)$ в среднем по ансамблю и не относится к отдельно взятой реализации $x(t)$. Так если $R_x(\tau) > 0$, то о случайных величинах $X(t_1)$ и $X(t_1 + \tau)$ можно сказать лишь то, что у них вероятно одинаковые знаки. Если $R_x(\tau) < 0$, то эти случайные величины, скорее всего, имеют противоположные знаки. Корреляционная функция $R_x(\tau)$ – функция сдвига, а не времени.

Стационарностью в широком смысле обладает довольно большой класс случайных процессов, встречающихся на практике. Поэтому слова “в широком смысле” часто опускают и называют процессы стационарными.

Дальнейшее упрощение анализа случайных процессов достигается, если процессы обладают свойством эргодичности. Это свойство означает, что почти каждый член ансамбля ведет себя в статистическом смысле так же, как и весь ансамбль.

Таким образом, можно проанализировать статистические характеристики процесса путем усреднения по времени вдоль одной реализации (рис. 2.1). Условие эргодичности случайного процесса включает в себя и условие стационарности.

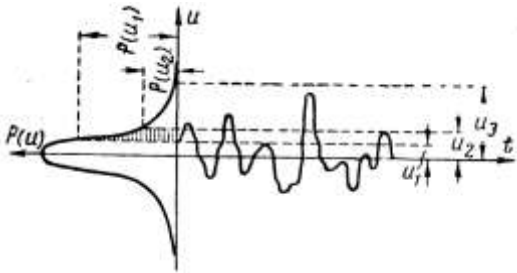


Рис. 2.1. Получение кривой распределения $p(u)$ эргодического процесса $u(t)$.

Обозначая усреднение по времени условными скобками, запишем характеристики (1.5) – (1.9):

Среднее значение процесса

$$\hat{m}_x = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (2.6)$$

равно постоянной составляющей выбранной реализации.

Дисперсия

$$\hat{\sigma}_x^2 = \langle [x(t) - \hat{m}_x]^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \hat{m}_x]^2 dt \quad (2.7)$$

имеет смысл *мощности флуктуационной составляющей эргодического процесса*.

Корреляционная функция

$$\hat{R}_x(\tau) = \langle [x(t) \cdot x(t + \tau)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t + \tau) dt, \quad (2.8)$$

при этом

$$\hat{R}_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

– *средняя мощность реализации*.

Ковариационная функция

$$\begin{aligned} \hat{K}_x(\tau) &= \langle [x(t) - \hat{m}_x][x(t + \tau) - \hat{m}_x] \rangle = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \hat{m}_x][x(t + \tau) - \hat{m}_x] dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Достаточным условием эргодичности центрированного стационарного в широком смысле случайного процесса является условие:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0. \quad (2.10)$$

Менее жесткое условие эргодичности

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_x(\tau) d\tau = 0 \quad (2.11)$$

– условие Служко.

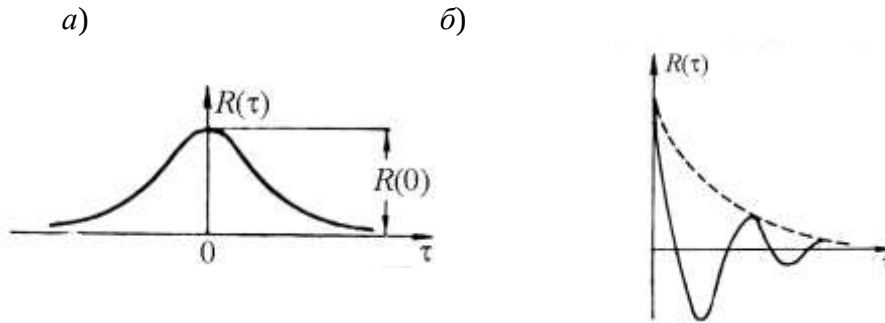


Рис. 2.2. Типичные корреляционные функции центрированных процессов

Типичная корреляционная функция центрированного процесса убывает при увеличении τ (рис. 2.2a). Однако приближение $R_x(\tau)$ к нулю не всегда происходит монотонно. В ряде случаев $R_x(\tau)$ колеблется около нулевого значения, приближаясь к нему при увеличении τ (рис. 2.2б).

Если процесс имеет постоянную составляющую, то

$$\hat{R}_x(\infty) = \langle x(t) x(t + \tau) \rangle = \langle x(t) \rangle \langle x(t) \rangle = \langle x(t) \rangle^2, \quad (2.12)$$

т. е. корреляционная функция при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к квадрату постоянной составляющей.

Интервал корреляции

Для многих процессов, встречающихся на практике, характерно свойство: их корреляционная функция стремится к нулю с увеличением временного сдвига τ между отсчетами. Числовой характеристикой, служащей для оценки скорости убывания корреляционной функции, является *интервал корреляции*, определяемый выражением

$$\tau_k = \frac{1}{R_x(0)} \int_0^\infty |R_x(\tau)| d\tau = \int_0^\infty |\rho_x(\tau)| d\tau, \quad (2.13)$$

где

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \quad (2.14)$$

– так называемый *коэффициент корреляции* (безразмерная величина).

Физический смысл интервала корреляции заключается в следующем. Если известна информация о поведении какой-либо реализации “в прошлом”, то возможен вероятностный прогноз случайного процесса на время порядка τ_k . Для $\tau \gg \tau_k$ мгновенные значения $x(t)$ и $x(t+\tau)$ будут практически не коррелированы и прогноз невозможен. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное τ_k , что при условии $|\tau| > \tau_k$ выполняется неравенство

$$|\rho(\tau)| \leq \varepsilon. \quad (2.15)$$

Замечание. Любая характеристика $\hat{L}_T$ эргодического случайного процесса, полученная усреднением за большой, но конечный интервал T , является случайной относительно ансамбля оценок. Эта оценка связана с истинной характеристикой L , полученной усреднением по всему ансамблю, соотношением

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P[\hat{L}_T = L] = 1, \quad (2.16)$$

т. е. при $T \rightarrow \infty$ вероятность совпадения оценки $\hat{L}_T$ с истинной характеристикой L сколь угодно близка к единице. Так применительно к корреляционной функции это записывается в виде

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P[\hat{R}_T(\tau) = R_x(\tau)] = 1. \quad (2.17)$$

Грубой ошибкой было бы записать (2.17) в виде $\lim_{T \rightarrow \infty} [\hat{R}_T(\tau) - R_x(\tau)] = 0$. Под знак обычного предела попала бы случайная относительно ансамбля реализаций оценка $\hat{R}_T(\tau)$, которая может принять (с ненулевой вероятностью) произвольно большое значение.

1.3. Спектральная плотность мощности

Представим физическую интерпретацию этой важной спектральной характеристики случайного процесса.

Кажется естественным использовать преобразование Фурье для определенной реализации $x(t)$ случайного процесса

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

в качестве спектральной характеристики процесса. Однако такой подход оказывается невозможным по двум причинам.

Во-первых, спектральная плотность $X(\omega)$ для любой фиксированной частоты ω будет случайной величиной относительно ансамбля реализаций. Усреднение функции $X(\omega)$ по ансамблю приводит к нулевому спектру (при $M[x(t)] = 0$) из-за случайности и независимости фаз спектральных составляющих в отдельных реализациях.

Вторая, более важная, причина не результативности этого подхода заключается в том, что для стационарного процесса $X(\omega)$ почти никогда не существует, т. к. абсолютная интегрируемость

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (3.1)$$

никогда не удовлетворяется для реализаций стационарного случайного процесса. Ограничим длительность реализаций следующим образом:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leq \frac{T}{2} < \infty, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Такой *усеченный* процесс $x_T(t)$ удовлетворяет условию (3.1), если исходный стационарный процесс $X(t)$ имеет ограниченную дисперсию. В этом случае $x_T(t)$ будет удовлетворять строгому требованию интегрируемости в квадрате:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt < \infty. \quad (3.3)$$

Следовательно, для $x_T(t)$ будет существовать преобразование Фурье:

$$X(\omega, T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt, \quad T < \infty. \quad (3.4)$$

Энергию рассматриваемого отрезка реализации можно определить, используя равенство Парсеваля:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega, T)|^2 d\omega.$$

Разделив обе части на T , получим

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega, T)|^2 d\omega \quad (3.5)$$

– выражение для средней мощности реализации $x(t)$ на отрезке T . Если процесс эргодический, то эта величина при $T \rightarrow \infty$ приближается к значению среднего квадрата случайного процесса. Однако на данном этапе еще нельзя переходить к пределу при $T \rightarrow \infty$. Необходимо напомнить, что $X(\omega, T)$ является случайной относительно ансамбля реализации случайного процесса $X(t)$. Выполнив сначала усреднение обеих частей выражения (3.5), а потом, переходя к пределу при $T \rightarrow \infty$, получим с учетом эргодичности

$$M \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T^2 dt \right\} = M \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega, T)|^2}{T} d\omega \right\},$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{x_T^2} dt = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M \left[|X(\omega, T)|^2 \right]}{T} d\omega,$$

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega, \quad (3.6)$$

где

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M \left[|X(\omega, T)|^2 \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M \left[\left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \right] \quad (3.7)$$

называется *спектральной плотностью мощности* случайного процесса $X(t)$. В соответствии с (3.6) $G(\omega)$ интерпретируется как распределение среднего квадрата процесса по частотам. Если $x(t)$ – напряжение или ток, действующие на сопротивлении 1 Ом, то $\overline{x^2(t)}$ – есть средняя мощность, рассеиваемая на этом резисторе. Спектральную плотность мощности $G(\omega)$ можно интерпретировать как среднюю мощность, сосредоточенную в полосе частот шириной 1 Гц при центральной частоте $f = \frac{\omega}{2\pi}$ Гц.

Для любой заданной реализации $x_T(t)$ функция

$$\hat{G}(\omega, T) = \frac{|X(\omega, T)|^2}{T} \quad (3.8)$$

называется *периодограммой* и представляет собой флуктуирующую по ансамблю реализаций оценку спектральной плотности мощности. В 10-м семестре мы рассмотрим методы сглаживания этой оценки.

По своему определению $G(\omega)$ есть вещественная неотрицательная функция частоты. Спектральная плотность мощности играет фундаментальную роль в прикладной теории стационарных случайных процессов.

1.4. Теорема Винера–Хинчина

Эта теорема устанавливает связь между корреляционной функцией $R(\tau)$ и спектральной плотностью мощности $G(\omega)$ и утверждает, что эти характеристики стационарного случайного процесса связаны парой преобразования Фурье

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (4.1)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4.2)$$

Поскольку $R(\tau)$ – чётная функция аргумента τ , то соответствующий спектр мощности $G(\omega)$ представляет собой чётную функцию частоты. Отсюда следует, что пара ПФ (4.1) и (4.2) может быть записана в виде

$$G(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (4.3)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (4.4)$$

Пример 4.1. Рассмотрим стационарный процесс $X(t)$ с равномерной спектральной плотностью в полосе частот $[-\omega_c, \omega_c]$:

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0 = \text{const}, & \text{при } |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & \text{при } |\omega| > \omega_c. \end{cases}$$

В соответствии с (4.3) корреляционная функция этого процесса

$$R(\tau) = \frac{G_0}{\pi} \int_0^{\omega_c} \cos \omega \tau d\omega = \frac{G_0 \omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c \tau}{\omega_c \tau}. \quad (4.5)$$

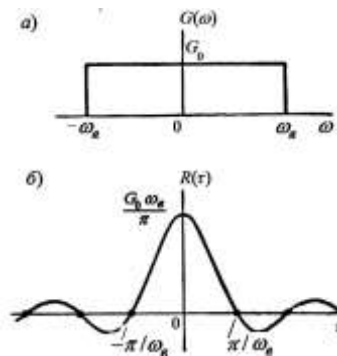


Рис. 4.1. Характеристики шума с ограниченным по полосе спектром:
а – спектральная плотность мощности, б – корреляционная функция

Из рис. 4.1б видно, что при значениях τ , кратных π / ω_c , $R(\tau) = 0$, т. е. сечения процесса, разделенные интервалом $\lambda \cdot (\pi / \omega_c)$, где λ – целое, не коррелированы между собой. При $\omega_c \rightarrow \infty$ приходим к процессу, который называется *белым шумом*. Корреляционная функция белого шума

$$R(\tau) = (G_0 / 2) \cdot \delta(\tau). \quad (4.6)$$

Таким образом, *белый шум является дельтакоррелированным*. Некоррелированность мгновенных значений такого случайного сигнала означает бесконечно большую скорость изменения их во времени. Белый шум физически нереализуем, однако он часто используется в качестве математической модели многих процессов, например, когда полоса пропускания системы, на которую воздействует широкополосный случайный сигнал, много меньше ширины спектра шума.

Пример 4.2. Для узкополосного случайного процесса со спектром шириной $\Delta\omega$, сосредоточенным возле частот $\pm\omega_0$ (рис. 4.2а), имеем с учётом предыдущего примера и теоремы смещения ПФ:

$$R(\tau) = \frac{G_0 \Delta\omega}{2\pi} \frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2} \tau}{\frac{\Delta\omega}{2} \tau} \cos \omega_0 \tau. \quad (4.7)$$

Эта функция изображена на рис.4.2б.



Рис. 4.2. Характеристики узкополосного случайного процесса: *a* – спектральная плотность мощности, *б* – корреляционная функция

1.5. Фильтрация случайных процессов

Пример 5.1. Пусть стационарный процесс $x(t)$ пропускается через ЛИВ-фильтр (линейный инвариантный во времени фильтр) с импульсной характеристикой $h(t)$ (рис. 5.1).

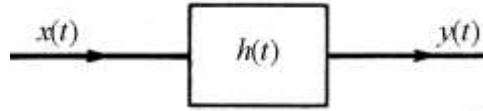


Рис. 5.1

Процесс на выходе $y(t)$ также стационарен. Взаимокорреляционная функция процессов на входе и выходе фильтра будет равна

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= M[y(t+\tau) \cdot x^*(t)] = M\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-\theta) x(\theta) d\theta\right] \cdot x^*(t)\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-\theta) R_{xx}(\theta-t) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-\eta) R_{xx}(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Т. е., взаимокорреляционная функция $R_{xy}(\tau)$ процессов на входе и выходе фильтра связана с автокорреляционной функцией $R_{xx}(\tau)$ входного процесса тем же линейным преобразованием (свёрткой), которое преобразует сигнал на входе в сигнал на выходе фильтра.

Найдём теперь автокорреляционную функцию выходного процесса:

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= M[y(t+\tau) \cdot y^*(t)] = \\ &= M\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-\theta) x(\theta) h^*(t-\eta) x^*(\eta) d\theta d\eta\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-\theta) h^*(t-\eta) R_{xx}(\theta-\eta) d\theta d\eta. \end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования и обозначая

$$\theta - \eta = s \text{ и } \lambda(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau + \eta) h^*(\eta) d\eta,$$

будем иметь

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau - s) R_{xx}(s) ds, \quad (5.1)$$

т.е. автокорреляционные функции $R_{yy}(\tau)$ и $R_{xx}(s)$ связаны интегралом свёртки. В спектральной области (5.1) имеет простую форму:

$$G_{yy}(f) = |H(f)|^2 \cdot G_{xx}(f), \quad (5.2)$$

где

$$G_{yy}(f) = \text{ПФ}[R_{yy}(\tau)]$$

– спектральная плотность мощности процесса на выходе фильтра,

$$G_{xx}(f) = \text{ПФ}[R_{xx}(s)]$$

– спектральная плотность мощности входного процесса,

$$|H(f)|^2 = H(f) \cdot H^*(f),$$

$$H(f) = \text{ПФ}[h(t)]$$

– частотная характеристика фильтра.

1.6. Дискретный случайный процесс

Дискретный случайный процесс можно рассматривать как *ансамбль* действительных или комплексных временных последовательностей. Обозначим такой ансамбль $x[k; i]$, где i – i -я последовательность этого ансамбля, а k – индекс дискретного времени. При заданном i будем использовать сокращенное обозначение $x[k]$. Для фиксированного k значения наблюдаемого отсчета по всем последовательностям ансамбля (сечение в момент k) будет представлять некоторую случайную величину.

Вероятность того, что $x[k] \leq a$, описывается функцией распределения

$$F(a, k) = P(x[k] \leq a).$$

Соответствующая плотность вероятности будет

$$p(a; k) = \frac{\partial F(a, k)}{\partial a}.$$

Среднее значение случайного процесса $x[k]$:

$$\bar{x}[k] = M\{x[k]\}$$

в общем случае зависит от момента k .

Автокорреляция случайного процесса

$$r_{xx}[k_1, k_2] = M\{x[k_1]x^*[k_2]\}.$$

Автоковариация, т. е. автокорреляция центрированного случайного процесса:

$$\begin{aligned} c_{xx}[k_1, k_2] &= M\{(x[k_1] - \bar{x}[k_1])(x^*[k_2] - \bar{x}^*[k_2])\} = \\ &= r_{xx}[k_1, k_2] - \bar{x}[k_1] \cdot \bar{x}^*[k_2]. \end{aligned}$$

Если среднее значение случайного процесса равно нулю при всех k , то автокорреляция и автоковариация такого процесса совпадают.

При рассмотрении двух различных случайных процессов $x[k]$ и $y[k]$ вводятся понятия *взаимной корреляции* (кросскорреляции):

$$r_{xy}[k_1, k_2] = M \{x[k_1] \cdot y^*[k_2]\}$$

и взаимной ковариации:

$$c_{xy}[k_1, k_2] = r_{xy}[k_1, k_2] - \bar{x}[k_1] \cdot \bar{y}^*[k_2].$$

Во всех выше приведенных определениях отражена явная зависимость от индекса времени.

Стационарный в широком смысле случайный процесс характеризуется тем, что его среднее значение постоянно при всех k , а автокорреляция зависит только от разности $m = k_2 - k_1$:

$$\bar{x}[k] = \bar{x},$$

$$r_{xx}[m] = M \{x[k+m]x^*[k]\} \quad (6.1)$$

– автокорреляционная последовательность (АКП). Отметим следующие полезные на практике свойства АКП:

$$r_{xx}[0] \geq |r_{xx}[m]|, \quad (6.2)$$

$$r_{xx}[-m] = r_{xx}^*[m], \quad (6.3)$$

справедливые при всех целых m .

Спектральная плотность мощности (СПМ) определяется как дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ) автокорреляционной последовательности

$$G_{xx}(f) = \Delta t \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] e^{-j2\pi f m \Delta t}, \quad (6.4)$$

где Δt – шаг дискретизации по времени. Ширина полосы СПМ ограничена значениями $\pm 1/2\Delta t$ Гц. Кроме того, СПМ периодична по частоте с периодом $f_d = 1/\Delta t$ Гц. Функция СПМ описывает распределение мощности случайного процесса по частоте.

Обратное ДВПФ

$$r_{xx}[m] = \int_{-1/2\Delta t}^{1/2\Delta t} G_{xx}(f) \cdot e^{j2\pi f m \Delta t} df \quad (6.5)$$

при $m=0$ дает

$$r_{xx}[0] = \int_{-1/2\Delta t}^{1/2\Delta t} G_{xx}(f) df \quad (6.6)$$

– среднюю мощность случайного процесса.

Пара ДВПФ (6.4) и (6.5) представляет теорему Винера–Хинчина для дискретного времени. Поскольку $r_{xx}[-m] = r_{xx}^*(m)$, то СПМ должна быть действительной положительной функцией. Если АКП – действительная функция, то $r_{xx}[-m] = r_{xx}[m]$ и СПМ – чётная функция частоты, и мы можем записать

$$G_{xx}(f) = 2\Delta t \sum_{m=0}^{\infty} r_{xx}[m] \cos 2\pi f m \Delta t. \quad (6.7)$$

Приведём примеры дискретных случайных процессов.

Пример 6.1. Особый интерес представляет *дискретно-временной белый шум* $v(k)$, для которого

$$\bar{v}(k) = 0,$$

$$r_{vv}[m] = \sigma_v^2 \cdot \mathbf{1}[m],$$

где

$$\mathbf{1}[m] = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0, \end{cases}$$

– единичный импульс и σ_v^2 – дисперсия шума, равная $r_{vv}[0]$. При остальных $m \neq 0$ белый шум не коррелирован сам с собой.

СПМ белого шума

$$G_{vv}(f) = \Delta t \sigma_v^2$$

постоянна на всех частотах.

Повторить материал 6-го семестра, относящийся к дискретному преобразованию Фурье (ДПФ):

- По лекциям «Дискретные преобразования сигналов» 2018 г. (<http://kprf.mipt.ru/index.php/uchebnye-kursy2/diskretnye-preobrazovaniya-signalov>). Проработать приводимые на лекциях примеры и задачи.
- По учебному пособию (Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье при цифровом спектральном анализе. – М.: 2007.) (стр. 18-28, 34-46).

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Свойства и теоремы ДПФ.

Теорема о циклической свёртке.

Соответствие между ДПФ и рядом Фурье.

Соответствие между ДПФ и непрерывным преобразованием Фурье.

Связь ДПФ и ДВПФ.

Интерполяция добавлением нулевых отсчётов.

Интерполяция функций с ограниченной полосой с помощью ДПФ.

Временная и частотная оси ДПФ.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой $2f_b = 10$ кГц дискретизируется в соответствии с теоремой отсчетов. По последовательности $x(k) = x(k \Delta t)$ длиной в $N = 1000$ отсчетов вычисляется

N -точечное ДПФ $X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Известны два значения $X(900) = 1$ В

и $X(420) = 5$ В. Найти все значения ДВПФ

$$X(\nu) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j 2\pi \nu k},$$

которые можно определить.

2. Вычислить и изобразить по модулю коэффициенты ДПФ $X(n)$ для последовательности

$$x(k) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{N} rk\right), & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

и фиксированного значения $r = 5$ и $N = 16$.

3. Пусть $X(n) = \sum_{k=0}^{11} x(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}$ - 12-точечное ДПФ действительной последовательности $x(k)$ и пусть

$$\begin{aligned} X(0) &= 10, & X(1) &= -5 - j4, & X(2) &= 3 - j2, & X(3) &= 1 + j3, \\ X(4) &= 2 + j5, & X(5) &= 6 - j2, & X(6) &= 12 \end{aligned}$$

Не вычисляя обратного ДПФ, определить

$$a) x(0), \quad b) x(6), \quad c) \sum_{k=0}^{11} x(k), \quad d) \sum_{k=0}^{11} e^{j \frac{2\pi}{3} k} x(k), \quad e) \sum_{k=0}^{11} |x(k)|^2$$

Примеры решения задач на ДПФ

1. ДПФ прямоугольного импульса.

Напомним формулы анализа и синтеза для ДПФ. Формула анализа (без масштабирующего множителя $(1/N)$),

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{j(2\pi/N)nk},$$

формула синтеза

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] e^{j(2\pi/N)nk}.$$

Рассмотрим последовательность $x[k]$, изображенную на рис. 1, а.

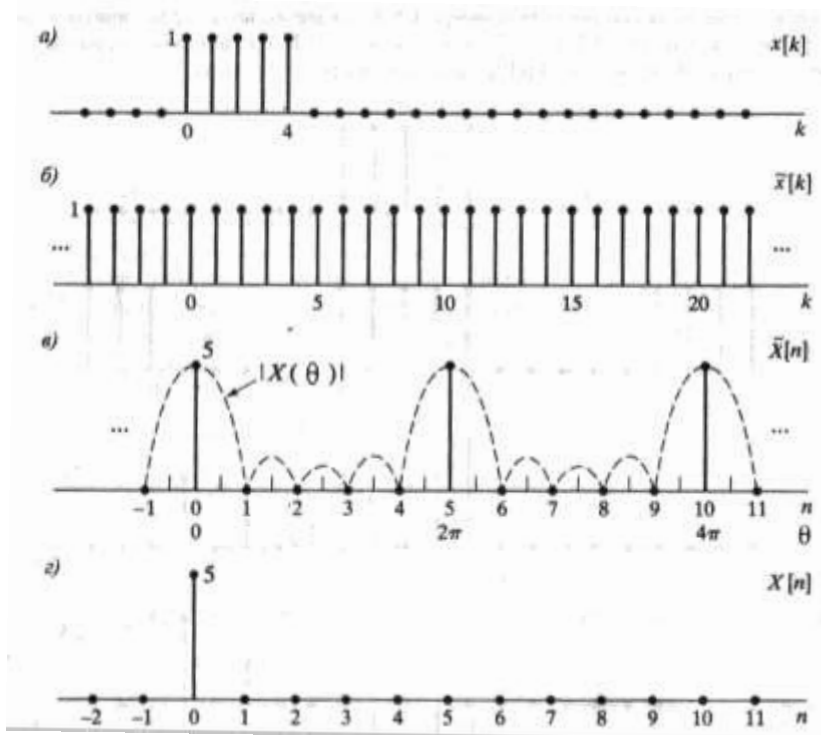


Рис. 1. Иллюстрация ДПФ прямоугольного импульса

При вычислении ДПФ эту последовательность можно считать конечной последовательностью, длина которой равна 5. Периодическая (с периодом 5) последовательность $\tilde{x}[k]$ показана на рис 1, б. Поскольку ее отсчеты постоянны над отрезком $[0, 4]$, то

$$\tilde{X}[n] = \sum_{k=0}^4 e^{j(2\pi/5)nk} = \frac{1 - e^{j2\pi n}}{1 - e^{j2\pi n/5}} = \begin{cases} 5, & n = 0, \pm 5, \pm 10, \dots, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

т. е. коэффициенты $\tilde{X}[n]$ отличны от нуля только при n , кратных 5 и показаны на рис.1, в.

Там же присутствует график модуля ДВПФ (пунктиром)

$$X(\theta) = \sum_{k=0}^4 x(k) e^{-j\theta k} = \frac{1 - e^{j5\theta}}{1 - e^{j\theta}} = \frac{e^{j5\theta/2} \sin(5\theta/2)}{e^{j\theta/2} \sin(\theta/2)}.$$

Ясно, что $\tilde{X}[n]$ - последовательность отсчетов функции $X(\theta)$, вычисленных при $\theta_n = 2\pi n/5$.

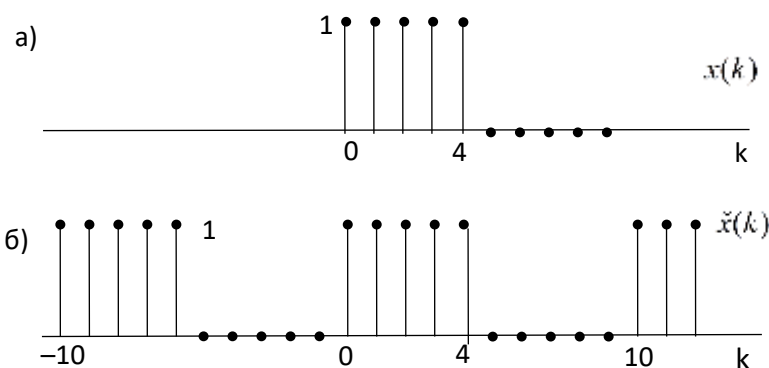
Пятиточечное ДПФ $X[n]$ связано с периодической последовательностью $\tilde{X}[n]$ следующим образом:

$$X[n] = \begin{cases} \tilde{X}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

График этого ДПФ изображен на рис. 1, г. Видно, что одного отсчета на периоде ДВПФ недостаточно для визуализации функции $X(\theta)$ по формуле (см. связь ДПФ и ДВПФ)

$$X(\theta = \frac{2\pi n}{N}) = X(n), \quad n \in [0, N-1], \quad N = 5$$

2. Добавим к исходной последовательности $x[k]$ 5 нулевых отсчетов и рассмотрим последовательность $\tilde{x}[k]$, изображенную на рис 2 а.



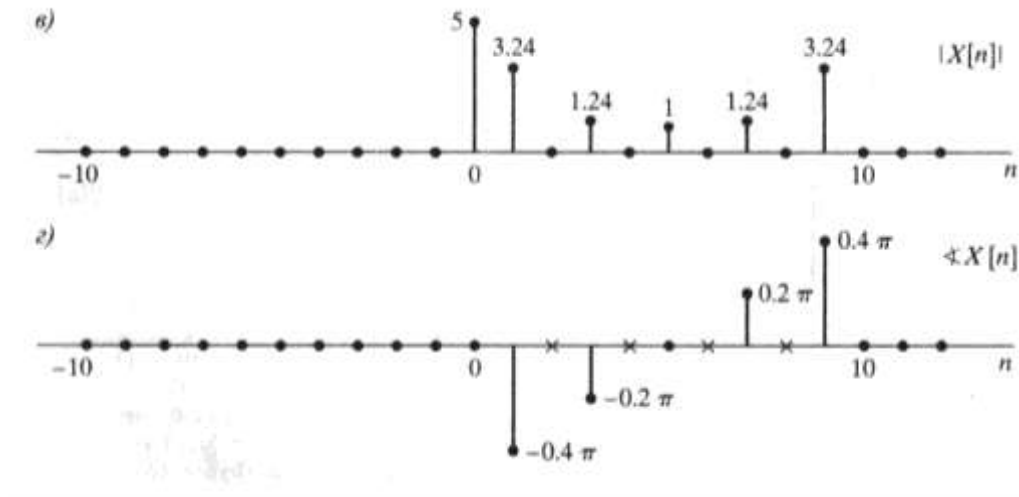


Рис. 2

При вычислении ДПФ эту последовательность можно считать конечной последовательностью, длина которой равна 10. Периодическая (с периодом 10) последовательность $\tilde{x}[k]$ показана на рис. 2, б. Поскольку ее отсчеты постоянны над отрезком $[0,4]$, то

$$X[n] = \sum_{k=0}^4 e^{-j(2\pi/10)nk} = \frac{1 - e^{-j\pi n}}{1 - e^{-j\pi n/5}} = \frac{e^{-j\pi n/2}}{e^{-j\pi n/10}} \frac{\sin \pi n/2}{\sin \pi n/10} = e^{-j4\pi n/10} \frac{\sin \pi n/2}{\sin \pi n/10}.$$

Модуль

$$|X[n]| = \left| \frac{\sin \pi n/2}{\sin \pi n/10} \right|$$

и фаза

$$\varphi(n) = -4\pi n/10$$

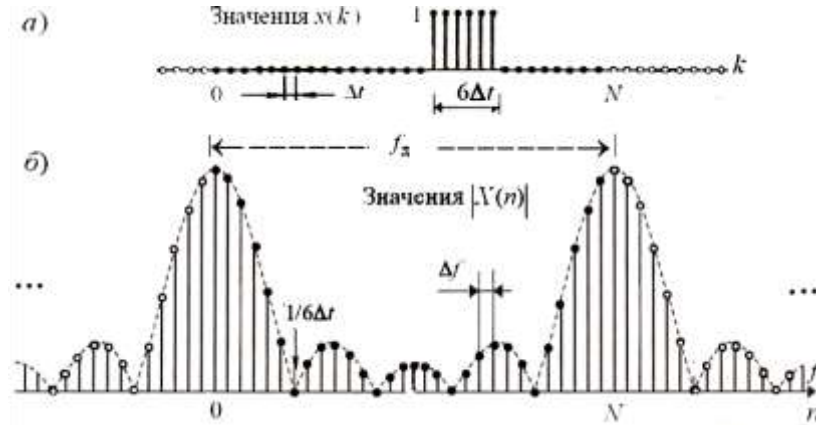
коэффициентов ДПФ приведены на рис. 2, в и рис. 2, г соответственно (крестиками обозначены точки, в которых фаза не определена). Сравнивая рис. 1 и рис. 2 видим, что добавление к исходной последовательности $x[k]$ 5 нулевых отсчетов увеличивает размерность ДПФ с 5 до 10.

При этом увеличивается число отсчетов и **повышается качество визуализации ДВПФ**

$$X(\theta) = \sum_{k=0}^9 x(k) e^{-j\theta k} = \frac{1 - e^{j5\theta}}{1 - e^{j\theta}} = \frac{e^{j5\theta/2} \sin(5\theta/2)}{e^{j\theta/2} \sin(\theta/2)},$$

поскольку $X(\theta = \frac{2\pi n}{N}) = X(n)$, $n \in [0, N-1]$, $N = 10$.

3.



Обозначим последовательность из $L=6$ отсчётов прямоугольного импульса через $y(k)$. ДВПФ этой последовательности

$$\begin{aligned} Y(v) &= \sum_{k=0}^{L-1} y(k) e^{-j2\pi v k} = \sum_{k=0}^{L-1} e^{-j2\pi v k} = \frac{1 - e^{-j2\pi v L}}{1 - e^{-j2\pi v}} = \frac{e^{-j\pi v L}}{e^{-j\pi v}} \cdot \frac{\sin \pi v L}{\sin \pi v} = \\ &= e^{-j\pi v (L-1)} \frac{\sin \pi v L}{\sin \pi v} = e^{-j\pi 5v} \frac{\sin \pi 6v}{\sin \pi v} = e^{-j\pi 5f/f_d} \frac{\sin \pi 6f/f_d}{\sin \pi f/f_d}. \end{aligned}$$

Модуль этой периодической функции (с периодом f_d) не зависит от начала отсчёта и изображён на рисунке 3 пунктиром.

Последовательность $x(k)$ длиной в N отсчётов получена путём дополнения последовательности $y(k)$ нулевыми отсчётами. Число таких нулевых отсчётов будет $N-L$. При этом улучшается качество визуализации спектральной функции $Y(v)$, которая остаётся неизменной от такого дополнения, так как она определяется первоначальной длиной массива $y(k)$. Отсчётные значения функции $X(v)$ в точках $v_n = n/N$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, взятые с шагом $\Delta v = 1/N$, будут

$$X(v_n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi n k / N}.$$

Это выражение с точностью до множителя $1/N$ представляет собой N -точечное ДПФ.

На рисунке 6 изображены относительные величины N коэффициентов ДПФ на интервале $0 \leq n \leq N-1$:

$$X(n) = \frac{1}{N} X(v = \frac{n}{N}), \quad n \in [0, N-1], \quad N = 30.$$

Расстояние по сетке частот ДПФ $\Delta f = f_d / N = 1 / N \Delta t = 1 / 30 \Delta t$ Гц. Видно, что улучшается качество визуализации спектральной функции $Y(v)$, которая остаётся неизменной от такого дополнения, так как она определяется первоначальной длиной массива $y(k)$. Если бы ДПФ вычислялось по $N = L = 6$ отсчетам, т. е. без дополнения нулями, то на интервале $0 \leq n \leq N-1$ был бы всего один отсчет $X(0)$, по которому визуализация спектральной функции $Y(v)$ была бы невозможна. Расстояние по сетке частот ДПФ было бы $\Delta f = f_d / N = 1 / N \Delta t = 1 / 6 \Delta t$ Гц.