

Глава 5. Быстрое преобразование Фурье

В этой главе обсуждаются высокоэффективные алгоритмы цифрового вычисления ДПФ, которые обычно называют *быстрым преобразованием Фурье* (БПФ).

5.1. Быстрое преобразование Фурье

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) представляет собой эффективный метод вычисления ДПФ. Его эффективность заключается в существенном уменьшении числа операций умножения и суммирования, затрачиваемых для получения всех N коэффициентов ДПФ, которые запишем в виде

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{nk}, \quad (5.1.1)$$

где $W_N^{nk} = \exp(-j \frac{2\pi}{N} nk)$ – дискретные экспоненциальные функции, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Здесь и далее масштабирующий множитель $1/N$ в прямом преобразовании для простоты опущен.

Прямое вычисление всех N коэффициентов ДПФ по (5.1.1) требует N^2 операций типа «комплексное умножение плюс сложение». Основная идея БПФ состоит в том, чтобы разбить исходную N -точечную последовательность на две более короткие последовательности, из ДПФ которых можно получить ДПФ исходной N -точечной последовательности. Так, например, если N чётное, то исходная N -точечная последовательность разбивается на две $(N/2)$ -точечные последовательности. Для вычисления искомого N -точечного ДПФ потребуется $(N/2)^2 \cdot 2$ операций типа «комплексное умножение плюс сложение», т. е. вдвое меньше по сравнению с прямым вычислением. Такое уменьшение размерности ДПФ вдвое называется *итерацией*. Эту операцию можно повторить, вычисляя вместо $(N/2)$ -точечного ДПФ два $(N/4)$ -точечных ДПФ, сокращая тем самым объём вычислений ещё в два раза. Процесс уменьшения размера ДПФ продолжается до тех пор, пока не останутся только двухточечные ДПФ. Как будет показано далее, алгоритм БПФ с основанием 2 затрачивает на вычисление искомого N -точечного ДПФ $N \log_2 N$ операций, так что выигрыш в числе операций составляет

$$p = \frac{N^2}{N \log_2 N} = \frac{N}{\log_2 N} \text{ и при увеличении } N \text{ может быть очень большим.}$$

Алгоритм БПФ основан на периодичности ядра преобразования W_N^{nk} .

Алгоритм БПФ с составным основанием

Прямой метод вычисления всех коэффициентов в соответствии с (5.1.1) требует N^2 операций комплексного умножения и суммирования. Это число может оказаться очень большим. Возможность сокращения числа операций основывается на представлении одномерного ДПФ в виде многомерного. Для этого необходимо, чтобы длина массива являлась составным числом

$$N = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_p. \quad (5.1.2)$$

Разберем эту возможность на пример двух сомножителей:

$$N = N_1 N_2. \quad (5.1.3)$$

При этом входной массив из N отсчетов разбивается на N_2 блоков по N_1 элементов в каждом (рис. 5.1.1).

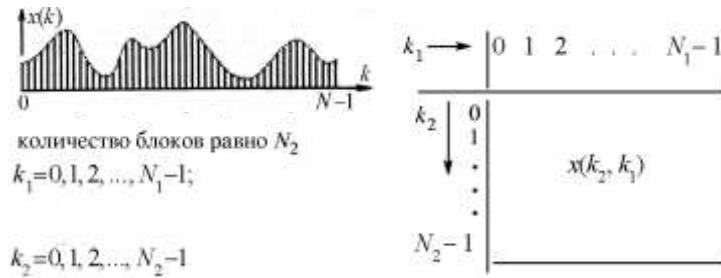


Рис. 5.1.1. Образование двумерного массива из одномерного

Расположив блоки один под другим, получаем двумерный массив. Нетрудно убедиться, что одномерный номер k может быть представлен в виде

$$k = N_1 k_2 + k_1. \quad (5.1.4)$$

Первое слагаемое соответствует целому числу (k_2) блоков, предшествующих номеру k , а второе слагаемое определяет номер элемента в блоке, содержащем номер k .

ДПФ этого двумерного массива также будет иметь вид двумерного массива с переменными n_1 и n_2 :

$$n_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

Пусть двумерный массив имеет вид (рис. 5.1.2)

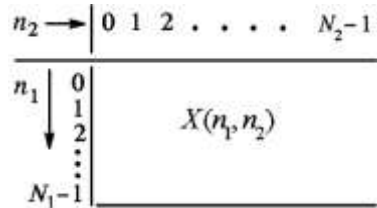


Рис. 5.1.2

Одномерный номер n может быть представлен в виде

$$n = N_2 n_1 + n_2. \quad (5.1.5)$$

Для базисной функции ДПФ W_N^{nk} с учетом (5.1.4) и (5.1.5) можем записать

$$W_N^{kn} = W_N^{(N_1 \cdot k_2 + k_1)(N_2 \cdot n_1 + n_2)} = W_N^{N \cdot k_2 \cdot n_1} W_N^{N_1 \cdot k_2 \cdot n_2} W_N^{N_2 \cdot k_1 \cdot n_1} W_N^{k_1 \cdot n_2}.$$

Учитывая, что

$$W_N^{N \cdot k_2 \cdot n_1} = 1; \quad W_N^{N_1 \cdot k_2 \cdot n_2} = W_{N_2}^{k_2 \cdot n_2}; \quad W_N^{N_2 \cdot k_1 \cdot n_1} = W_{N_1}^{k_1 \cdot n_1},$$

получаем

$$W_N^{kn} = W_{N_1}^{k_1 \cdot n_1} W_N^{k_1 \cdot n_2} W_{N_2}^{k_2 \cdot n_2}.$$

Подставим это выражение в (5.1.1), тогда

$$X(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{k_1 \cdot n_1} W_N^{k_1 \cdot n_2} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} x(k_2, k_1) W_{N_2}^{k_2 \cdot n_2}. \quad (5.1.6)$$

\uparrow ← N_2 точечные ДПФ →
 Вектор поворота
 \leftarrow N_1 -точечные ДПФ \rightarrow

Можно выделить следующие этапы вычисления коэффициентов ДПФ:

- 1) сначала вычисляются N_2 -точечные ДПФ с ядром $W_{N_2}^{k_2 n_2}$ по столбцам матрицы $[x(k_2, k_1)]$:

$$Y(k_1, n_2) = \sum_{k_2=0}^{N_2-1} x(k_2, k_1) W_{N_2}^{k_2 n_2};$$

число таких ДПФ соответствует числу столбцов матрицы $[x(k_2, k_1)]$ и равно N_1 ;

- 2) умножение на поворачивающие множители $W_N^{n_2 k_1}$, в результате образуется новый массив

$$Z(k_1, n_2) = Y(k_1, n_2) W_N^{n_2 k_1};$$

число умножений равно $N_1 \cdot N_2$;

- 3) вычисляются ДПФ с ядром $W_{N_1}^{n_1 k_1}$ по столбцам матрицы $[Z(k_1, n_2)]$:

$$X(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} Z(k_1, n_2) W_{N_1}^{n_1 k_1}.$$

Полное число операций в сумме по всем трем этапам будет

$$M = N_1 \cdot (N_2)^2 + N_1 \cdot N_2 + N_2 \cdot (N_1)^2 = N_1 \cdot N_2 \cdot (N_1 + N_2 + 1),$$

т. е. меньше, чем $N^2 = (N_1)^2 \cdot (N_2)^2$ при прямом методе вычислений.

Таким образом, исходное N -точечное ДПФ оказалось сведённым к ДПФ, производимым над уменьшенными массивами N_2 и N_1 .

Пример. 5.1.1. Пусть $N = 35 = 5 \cdot 7$. БПФ-алгоритм выполняется за $M = 5 \cdot 7 \cdot (5 + 7 + 1) = 455$ операций вместо $N^2 = 1225$ при прямом вычислении по (5.1.1).

Если N_1 и N_2 сами являются составными, то каждое из ДПФ $_{N_1}$ и ДПФ $_{N_2}$ может быть выполнено с применением рассмотренного алгоритма. Выигрыш в числе операций при этом еще более возрастет. В общем случае, если выполняется (5.1.2), такая процедура позволяет уменьшить общее число операций при вычислении ДПФ до величины

$$N \sum_{i=1}^p N_i \text{ вместо } N^2 = N \prod_{i=1}^p N_i.$$

В заключение на рис. 5.1.3 приведен граф БПФ для $N = 6 = 2 \cdot 3$ ($N_1 = 2, N_2 = 3$).

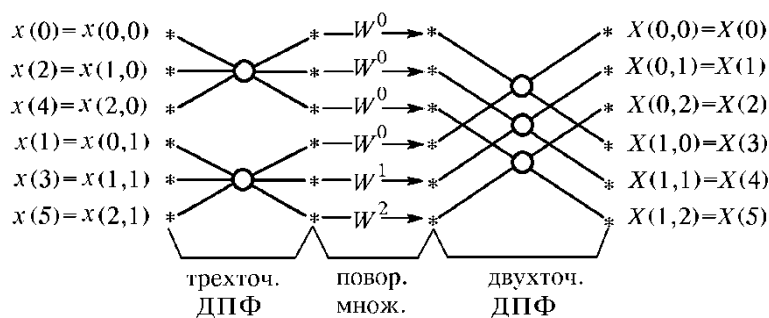


Рис. 5.1.3. Граф БПФ для составного $N = 6$

Умножение на поворачивающие множители обозначено стрелками, рядом с которыми записаны значения коэффициентов $W_6^{n_2 k_1}$. Звёздочкой обозначены ячейки памяти.

5.2. Алгоритмы БПФ с основанием 2

Рассмотрим случай, когда N является степенью двойки. Пусть в (5.1.2) $N_1 = 2, N_2 = N/2$, тогда на первой итерации N -точечное ДПФ представляется через двухточечные и $N/2$ -точечные ДПФ:

$$X(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^1 W_2^{n_1 k_1} W_N^{n_2 k_1} \sum_{k_2=0}^{(N/2)-1} W_{N/2}^{n_2 k_2} x(k_2, k_1). \quad (5.2.1)$$

Эта же схема вычислений может быть использована на следующей итерации для получения каждого из $N/2$ -точечных ДПФ. В результате перейдем к $N/4$ -точечным ДПФ и т. д., пока не останутся только двухточечные ДПФ. Соответствующий граф вычислений для $N = 8$ приведен на рис. 5.2.1.

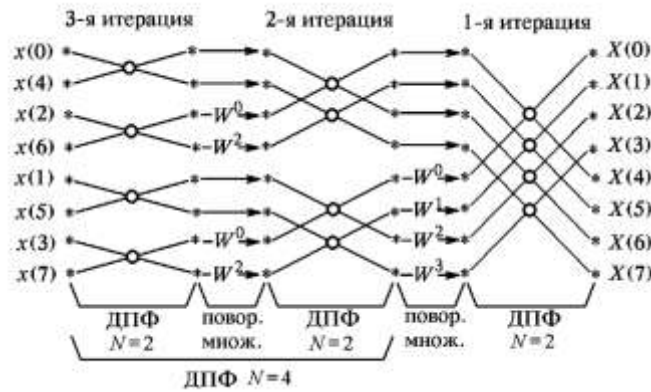


Рис. 5.2.1. Граф алгоритма БПФ с прореживанием по времени для $N = 8$

В данном графе умножение на вектор поворота выполняется до двухточечного ДПФ. Такой алгоритм получил название *алгоритма БПФ с прореживанием по времени*. Его базовая операция «бабочка» приведена на рис. 5.2.2. Само двухточечное ДПФ не содержит умножений: все умножения сводятся к умножениям на поворачивающие множители W_N^m , расположенные у стрелочек.

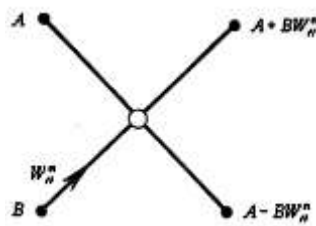


Рис. 5.2.2. Базовая операция «бабочка» алгоритма БПФ с прореживанием по времени

На каждой итерации имеется $N/2$ базовых операций алгоритма БПФ, каждая из которых состоит из умножения на вектор поворота и двухточечного ДПФ. Еще одной особенностью графа на рис. 5.2.1 является то, что входные отсчеты расположены в так называемом разрядно-инверсном порядке, а выходные – в естественном.

Но- мер	Двоичное представление	Инверсия разрядов	Разрядно- инверсный. порядок
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Пусть теперь в (5.1.2) $N_1 = N / 2$, $N_2 = 2$. Тогда

$$X(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N/2-1} W_{N/2}^{n_1 k_1} \cdot W_N^{n_2 k_1} \sum_{k_2=0}^1 x(k_2, k_1) W_2^{n_2 k_2}. \quad (5.2.2)$$



Здесь вначале выполняются двухточечные ДПФ над входным массивом, затем $N / 2$ -точечные. На следующей итерации аналогично представляются $N / 2$ -точечные ДПФ. Соответствующий данной процедуре граф вычислений для $N = 8$ представлен на рис. 5.2.3.

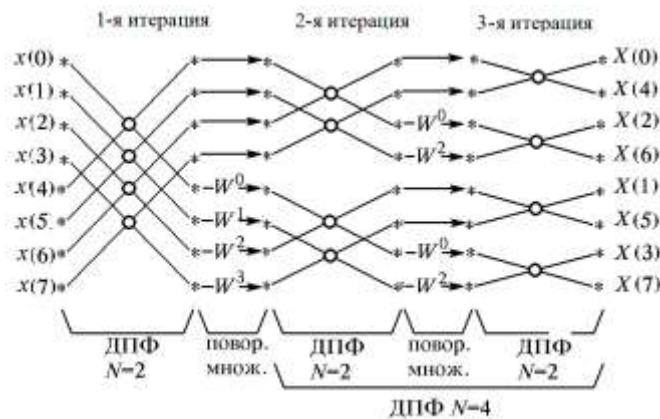


Рис. 5.2.3. Граф алгоритма БПФ с прореживанием по частоте для $N = 8$

Особенностью этого графа является естественный порядок данных на входе и разрядно-инверсный порядок на выходе. В этом алгоритме в отличие от предыдущего самые сложные умножения на поворачивающие множители производятся в начале графа.

В базовой операции алгоритма (рис. 5.2.4) сначала выполняется двухточечное ДПФ, а затем умножение на вектор поворота. Такой алгоритм носит название *алгоритма БПФ с прореживанием по частоте*.

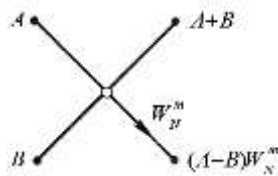


Рис. 5.2.4. Базовая операция «бабочка» алгоритма БПФ с прореживанием по частоте

Граф алгоритма БПФ с прореживанием по частоте можно получить из рис. 5.2.1, если входные и выходные отсчёты поменять местами, направления стрелок изменить на обратное и читать справа налево.

В алгоритме БПФ по основанию 2 на каждой итерации, по крайней мере, половина поворачивающих множителей – единицы, а число итераций равно $\log_2 N$, поэтому общее число комплексных умножений не превышает

$$M = (N/2) \log_2 N.$$

На каждой итерации в алгоритме БПФ по основанию 2 выполняется $N/2$ двухточечных ДПФ или N сложений. Всего в алгоритме БПФ по основанию 2 затрачивается

$$A = N \log_2 N$$

комплексных сложений. Можно считать, что при вычислении всех N коэффициентов ДПФ требуется около $N \log_2 N$ вычислительных операций типа «комплексное умножение плюс сложение» вместо N^2 при прямом вычислении по 5.1.1. При больших N выигрыш в числе операций может быть значительным. Например, при $N = 2^{10} = 1024$ этот выигрыш составляет $N/\log_2 N \approx 100$.

Вычисление обратного ДПФ может быть проведено с использованием любого из описанных выше алгоритмов БПФ:

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{-nk} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} X^*(n) W_N^{nk} \right]^*. \quad (5.2.3)$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой ДПФ последовательности $X^*(n)$, комплексно-сопряженной с $X(n)$, и может быть вычислено с использованием одного из описанных выше алгоритмов. Искомая последовательность $x(k)$ получается, таким образом, комплексным сопряжением этого ДПФ. Если последовательность $x(k)$ действительная, то комплексного сопряжения ДПФ не требуется. В (5.2.3) по-прежнему $W_N^{nk} = e^{-j2\pi nk/N}$.

При вычислениях на каждой базовой операции БПФ по основанию 2, включающей вычисление одного двухточечного ДПФ и умножение на поворачивающий множитель, выходные результаты можно размещать в те же ячейки памяти, где находились исходные данные. Такой алгоритм БПФ

называется *алгоритмом с замещением*. Графы, представленные на рис. 5.2.2 и рис. 5.2.3 соответствуют *алгоритмам с замещением*.

Математическая операция перехода из одномерного массива данных к двумерному является основой всех алгоритмов БПФ. Существует большое разнообразие алгоритмов БПФ, отличающихся порядком следования входных, промежуточных и выходных отсчетов, организацией вычислений, регулярностью структуры и т. д.

Известна, например, другая, часто используемая модификация алгоритмов БПФ, отличная от алгоритмов с замещением. Она получила название *алгоритмов с постоянной структурой*. Граф этого алгоритма для $N = 8$ с нормальным порядком входных и разрядно-инверсным выходных отсчетов приведен на рис. 5.2.5. Отличительной особенностью этого графа является то, что все итерации имеют одинаковую структуру, различаются лишь поворачивающие множители между итерациями.

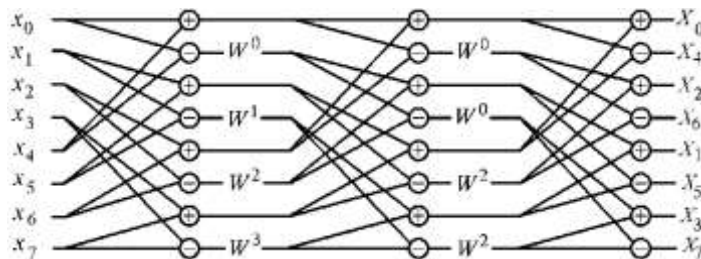


Рис. 5.2.5. Граф алгоритма БПФ с постоянной структурой с нормальным порядком входных и разрядно-инверсным порядком выходных отсчетов для $N = 8$

Этот алгоритм имеет и другую модификацию, при которой порядок входных отсчетов разрядно-инверсный, а выходных – нормальный (рис. 5.2.6).

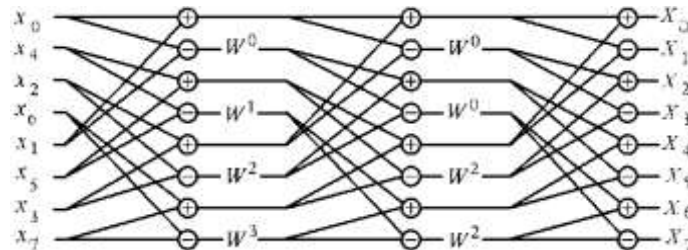


Рис. 5.2.6. Граф алгоритма БПФ с постоянной структурой с разрядно-инверсным порядком входных и нормальным выходных отсчетов для $N = 8$

Алгоритм БПФ по основанию 2 был предложен Кули и Тьюки в 1965 году и дал огромный импульс развитию цифровых методов обработки сигналов. Однако алгоритмы БПФ в наиболее общем виде были получены известным математиком Гауссом (1777–1855) и опубликованы в 1865 году.

Разбиение N -точечного ДПФ на два $N/2$ -точечных

Пусть $x(k)$ – действительная последовательность длиной в N отсчетов и пусть $x(k) \Leftrightarrow X(n)$, $n \in N$. Разобьём последовательность $x(k)$ на две $\frac{N}{2}$ -точечные подпоследовательности $x_1(k) = x(2k)$ и $x_2(k) = x(2k+1)$ из чётных и нечётных отсчетов соответственно. Пусть $x_1(k) \Leftrightarrow X_1(n)_{N/2}$ и

$x_2(k) \Leftrightarrow X_2(n)_{N/2}$ — два $\frac{N}{2}$ -точечных ДПФ этих подпоследовательностей. Установим связь $X(n)$ с $X_1(n)_{N/2}$ и $X_2(n)_{N/2}$. Для первых $N/2$ коэффициентов ДПФ ($n=0, 1, 2, \dots, (N/2)-1$) можем записать

$$\begin{aligned} X(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W_N^{-nk} = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} x(2k)W_N^{-2nk} + \sum_{k=0}^{(N/2)-1} x(2k+1)W_N^{-n(2k+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{(N/2)-1} x_1(k)W_{N/2}^{-nk} + W_N^{-n} \sum_{k=0}^{N-1} x_2(k)W_{N/2}^{-nk} = X_1(n)_{N/2} + W_N^{-n} X_2(n)_{N/2}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $W_N^{-2nk} = W_{N/2}^{-nk}$. Для $n=N/2, \dots, N-1$ с учётом свойств симметрии будем иметь $X(n) = X^*(N-n)$.

Это разбиение позволяет лучше понять граф алгоритма БПФ с прореживанием по времени.

5.3. Матричная форма ДПФ

Введем в рассмотрение квадратную матрицу $[W]_N$ порядка N с элементами

$$W_N^{nk} = \exp(j \frac{2\pi}{N} nk), \quad n, k \in 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

так, что номер строки совпадает с номером дискретной экспоненциальной функции, а номер столбца совпадает с номером отсчета функций. При этом произведение $n \cdot k$ обычно берется по модулю N , т. е.

$$W_N^{nk} = W_N^{nk \pmod{N}}.$$

Например, $nk=17$, тогда $nk_8=1$. Эти свойства матрицы ДПФ следуют из N -периодичности функции W_N^{nk} по обоим аргументам. Для случая $N=8$ матрица ДПФ имеет вид

$$[W]_8 = \begin{matrix} k \rightarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ n \downarrow & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{matrix} W_8^0 \\ W_8^1 \\ W_8^2 \\ W_8^3 \\ W_8^4 \\ W_8^5 \\ W_8^6 \\ W_8^7 \end{matrix} & \begin{matrix} W_8^0 \\ W_8^1 \\ W_8^2 \\ W_8^3 \\ W_8^4 \\ W_8^5 \\ W_8^6 \\ W_8^7 \end{matrix} & \begin{matrix} W_8^0 \\ W_8^1 \\ W_8^2 \\ W_8^3 \\ W_8^4 \\ W_8^5 \\ W_8^6 \\ W_8^7 \end{matrix} & \begin{matrix} W_8^0 \\ W_8^1 \\ W_8^2 \\ W_8^3 \\ W_8^4 \\ W_8^5 \\ W_8^6 \\ W_8^7 \end{matrix} & \begin{matrix} W_8^0 \\ W_8^1 \\ W_8^2 \\ W_8^3 \\ W_8^4 \\ W_8^5 \\ W_8^6 \\ W_8^7 \end{matrix} & \begin{matrix} W_8^0 \\ W_8^1 \\ W_8^2 \\ W_8^3 \\ W_8^4 \\ W_8^5 \\ W_8^6 \\ W_8^7 \end{matrix} & \begin{matrix} W_8^0 \\ W_8^1 \\ W_8^2 \\ W_8^3 \\ W_8^4 \\ W_8^5 \\ W_8^6 \\ W_8^7 \end{matrix} \end{matrix}$$

Эта же матрица с минимальными фазами будет

$$[W]_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} k \rightarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \downarrow & 0 \\ & 1 \\ & 2 \\ & 3 \\ & 4 \\ & 5 \\ & 6 \\ & 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^2 & W_8^5 & W_8^5 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^4 \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^4 & W_8^1 & W_8^6 & W_8^3 & W_8^3 \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^2 \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^4 & W_8^3 & W_8^2 & W_8^1 & W_8^1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Матрица ДПФ является симметрической и относится к классу так называемых *унитарных матриц*, для которых обратная матрица получается транспонированием и заменой элементов на комплексно-сопряженные так, что

$$[W^*]_N^T [W]_N = N[I]_N,$$

где $[I]_N$ – единичная матрица размером $N \times N$, а T – знак транспонирования.

Пример .

$$[W]_4 = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & 1 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix}, \quad [W]_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3} \\ 1 & W_4^{-2} & 1 & W_4^{-2} \\ 1 & W_4^{-3} & W_4^{-2} & W_4^{-1} \end{bmatrix}.$$

В матричной форме пара ДПФ имеет вид

$$\bar{X} = \frac{1}{N} [W]_N^{-1} \bar{x} \text{ – прямое ДПФ,}$$

$$\bar{x} = [W]_N \bar{X} \text{ – обратное ДПФ.}$$

Здесь \bar{X} и \bar{x} – N -мерные вектор-столбцы:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}.$$

5.4. Алгоритм БПФ с основанием 4

Пусть N является степенью 4. Тогда можно записать

$$N = N/4 \cdot 4 \quad (N = N_1 \cdot N_2; \quad N_1 = N/4, \quad N_2 = 4).$$

Разобьем последовательность $x(k)$ на $N_2 = 4$ блока с номерами $k_2 = 0, 1, 2, 3$. Каждый из блоков будет содержать по $N_1 = N/4$ элементов с номерами $k_1 = 0, 1, 2, \dots, N/4 - 1$.

Если расположить блоки один под другим, получится двумерный массив входных данных (рис. 5.4.1)

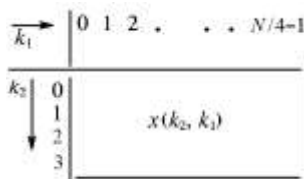


Рис. 5.4.1

При этом получается $N/4$ столбцов и 4 строки. Одномерный номер k выражается через переменные двумерного массива следующим образом:

$$k = (N/4) \cdot k_2 + k_1.$$

Можно найти ДПФ этого двумерного массива. Тогда результат также будет иметь вид двумерного массива (рис. 5.4.2) с переменными n_1 и n_2 : $n_1 = 0, 1, 2, \dots, N/4-1$, $n_2 = 0, 1, 2, 3$. При этом

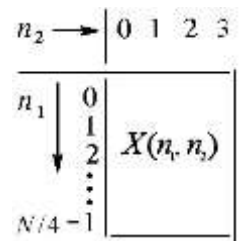
$$n = 4n_1 + n_2,$$


Рис. 5.4.2

поэтому

$$\begin{aligned} nk &= (4n_1 + n_2)[(N/4) \cdot k_2 + k_1] = \\ &= Nn_1 \cdot k_2 + 4n_1 \cdot k_1 + (N/4) \cdot n_2 \cdot k_2 + n_2 \cdot k_1. \end{aligned}$$

Подставив это в формулу для ДПФ, получаем

$$X(n) = X(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N/4-1} W^{4n_1 \cdot k_1} W^{n_2 \cdot k_1} \sum_{k_2=0}^3 x(k_2, k_1) W^{(N/4)n_2 \cdot k_2}.$$

Можно выделить следующие этапы вычислений:

1) вычисление 4-точечных ДПФ всех $N/4$ столбцов матрицы $[x(k_2, k_1)]$ с ядром $W_N^{N/4} = -j$:

$$Y(k_1, n_2) = \sum_{k_2=0}^3 x(k_2, k_1) W_N^{(N/4)n_2 \cdot k_2};$$

2) умножение на поворачивающие множители; в результате образуется новый массив

$$Z(k_1, n_2) = Y(k_1, n_2) W_N^{n_2 \cdot k_1};$$

3) вычисление $N/4$ -точечных ДПФ всех строк матрицы $[Z(k_1, n_2)]$ с ядром W_N^4 .

В свою очередь вычисление каждого из $N/4$ -точечных ДПФ можно разбить на рассмотренные этапы, используя представление $N/4 = (N/16) \cdot 4$ и т. д.

Процесс уменьшения размерности ДПФ продолжается до тех пор, пока не останутся 4-точечные ДПФ. В соответствии с этой процедурой изобразим для примера граф 16-точечного БПФ (рис. 3). В этом графе входные данные расположены в естественном порядке, а выходные – в разрядно-инверсном порядке четверичного представления номеров.

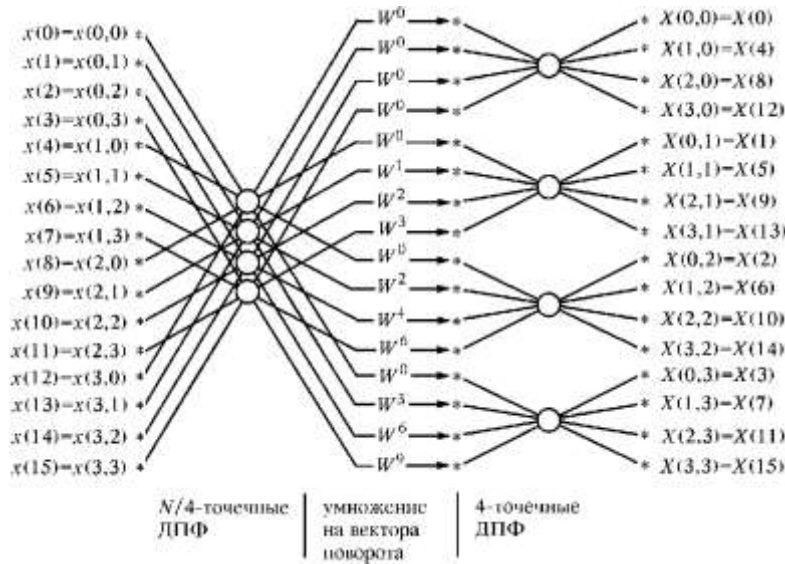


Рис. 5.4.3. Граф 16-точечного БПФ по основанию 4

В алгоритме с основанием 4 четырёхточечные ДПФ выполняется без умножений. При этом умножения на ± 1 и на $\pm j$ являются тривиальными и в расчет не принимаются.

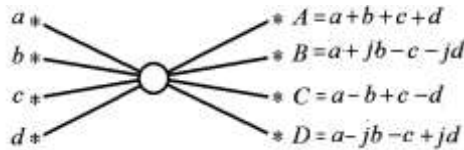


Рис. 5.4.4. Четырёхточечное ДПФ

Таким образом, все умножения в графе рис. 5.4.3 состоят только из умножений на поворачивающие множители на различных итерациях.

В алгоритме БПФ по основанию 4 на каждой итерации только четверть поворачивающих множителей тривиальны (в БПФ по основанию 2 – половина), однако число итераций равно $\log_4 N$ (т. е. вдвое меньше), поэтому общее число комплексных умножений будет

$$M = (3N / 4) \cdot \log_4 N,$$

что меньше, чем в БПФ по основанию 2. Количество комплексных сложений в алгоритмах БПФ по основанию 2 и 4 одинаково.

Можно построить алгоритмы БПФ по основанию 8, 16 и т. д., которые обеспечивают еще больший выигрыш в числе умножений.

5.5. Другие дискретные преобразования

ДПФ отображает действительную последовательность в комплексную область, что не всегда удобно. При обработке больших массивов данных, например изображений, наличие мнимой части коэффициентов ДПФ настолько усложняют вычисления, что исключается возможность применения ДПФ для целей сжатия таких массивов. Насколько это важная проблема поясним на примере.

Для образования одного кадра чёрно-белого изображения используют 625 строк, а на каждой строке 625 элементов (пикселей). Для воспроизведения движения приемлемого качества требуется формировать примерно 50 кадров в секунду. Скорость передачи при этом составляет

$$625 \cdot 625 \cdot 50 = 19\,031\,250 \text{ пикселей/с,}$$

что соответствует полосе пропускания $2f_s = 20$ МГц. Практически используется полоса 6 МГц. Для сжатия полосы используют чересстрочную развёртку и сокращают число строк до 575. При этом частота дискретизации составляет 12 МГц. С цветными изображениями ситуация усложняется тем, что необходимы дополнительная информация о цвете и применение помехозащищённого кодирования.

Необходимая скорость передачи по каналам цветного телевидения может достигать 200 Мбит/с, что практически совершенно недопустимо. В связи с этим разработан ряд международных стандартов сжатия изображений. Все они основаны на *кодировании преобразованием*. Суть его в следующем.

Изображение разделяется на блоки из $64 = 8 \cdot 8$ пикселей. Двумерный массив из 64 пикселей преобразуется в одномерный, далее применяется то или иное дискретное преобразование. Коэффициенты преобразования подвергаются обработке с целью сжатия и передаются по каналу связи. На приёмном конце осуществляется восстановление изображения путём обратного преобразования. Наилучшими с точки зрения объёма вычислений являются преобразования, отображающие вещественные данные в вещественную область. К ним относятся *дискретное преобразование Хартли (ДПХ)*, *дискретное косинусное преобразование (ДКП)*, *дискретное преобразование Уолша (ДПУ)*, *дискретное преобразование Хаара* и др.

5.6. Высокоскоростная свертка с использованием БПФ

Пусть имеются две последовательности $x(k)$ и $h(k)$ длиной в N отсчетов. Используя теорему о циклической свертке этих последовательностей, можно предложить следующую схему ее вычисления:

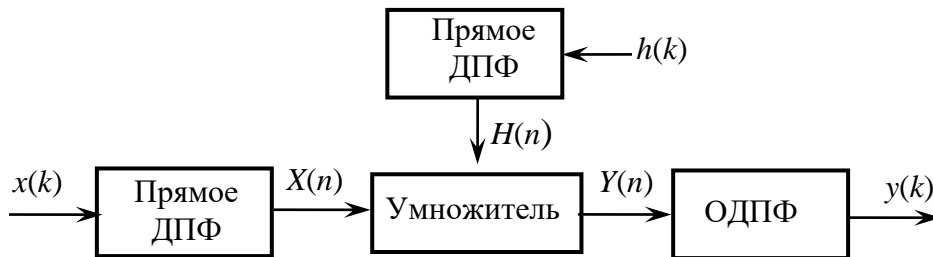


Рис.5.6.1. Блок-схема вычисления свертки с помощью ДПФ

По существу, это схема цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h(k)$ и входным сигналом $x(k)$. Эффективность данного способа обеспечивается использованием алгоритма БПФ для вычисления всех ДПФ. При больших N выигрыш в объеме вычислений по сравнению с прямым способом вычисления свертки во временной области может быть весьма значительным. Подсчитаем вычислительные затраты при использовании схемы рис. 5.6.1. и алгоритма БПФ с основанием 2:

- 1) $\frac{N}{2} \log_2 N$ базовых операций при вычислении всех коэффициентов ДПФ $X(n)$;
- 2) $\frac{N}{2} \log_2 N$ базовых операций при вычислении всех коэффициентов ДПФ $H(n)$;
- 3) $\frac{N}{2} \log_2 N$ базовых операций при вычислении ОДПФ;

- 4) N комплексных умножений для вычисления произведений $H(n) \cdot X(n)$,
 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Если интересоваться только самыми трудоемкими операциями комплексного умножения, то их число при использовании БПФ будет $N(3\log_2 N + 1)$ вместо N^2 при прямом вычислении.

Пример. Пусть $N = 1024 = 2^{10}$. Выигрыш быстрого способа вычисления свертки по сравнению с прямым

$$p = \frac{N^2}{N(3\log_2 N + 1)} = 33$$

и растет с увеличением N . Если коэффициент фильтра $H(n)$ найдены заранее и занесены в память, то

$$p = \frac{N^2}{2N\log_2 N + N} = 50.$$

Замечание. Схема на рис. 1 вычисляет циклическую свертку. При вычислении линейной свертки последовательности должны иметь $N/2$ ненулевых отсчетов, которые дополняются до массива N нулями. В общем случае, если требуется вычислить линейную свертку последовательностей $x(k)$ и $h(k)$, имеющих N_1 и N_2 отсчетов соответственно, каждая из последовательностей дополняется нулями до $N = N_1 + N_2 - 1$ отсчетов.

Рассмотренные ранее алгоритмы БПФ с прореживанием по времени и по частоте дополняют друг друга при вычислении свертки. В графе с прореживанием по частоте входные отсчеты расположены в нормальном порядке, а выходные – в разрядно-инверсном. В графе с прореживанием по времени – наоборот. Если для прямого преобразования использовать граф с прореживанием по частоте, а для обратного – граф с прореживанием по времени, то необходимости в переупорядочении входных и выходных данных, а также промежуточных результатов, нет.

Задачи к лекции 10 апреля 2018 г.

1. Непрерывный стационарный случайный сигнал обладает узкополосной спектральной плотностью мощности, равной нулю при $|f| \geq 10$ кГц. На интервале в 10 с сигнал подвергается дискретизации с частотой 20 кГц, после чего спектральная плотность мощности оценивается методом усреднённых периодограмм (методом Бартлетта).

а) Чему равна длина последовательности L ?

б) При вычислении периодограмм используется алгоритм БПФ с основанием 2. Пусть длина сегментов сигнала совпадает с размерностью ДПФ и равна N . При каком наименьшем значении N расстояние между частотами, в которых вычисляется спектральная оценка, не превышает 10 Гц?

в) Какое число сегментов P будет иметь сигнал, если отдельные его участки не перекрываются?

г) Нам хотелось бы уменьшить дисперсию оценки в 10 раз, сохранив расстояние между частотами из п. б) задачи. Сформулируйте два метода достижения поставленной цели. Сравнить эти методы.

2. Изобразить граф БПФ с прореживанием по времени для $N = 16$.

3. Изобразить граф БПФ с прореживанием по частоте для $N = 16$.