11. Спектральный анализ случайных последовательностей методом ДПФ

При спектральных измерениях случайных сигналов основной целью является определение *спектральной плотности мощности* (СПМ) (приложение, п.4).

Прямой метод определения СПМ случайных последовательностей основан на вычислении квадрата модуля ДПФ отдельных участков последовательности данных с использованием соответствующего статистического усреднения. Этот метод получил название *метода периодограмм* (приложение, п.6).

Косвенный метод определения СПМ основан на предварительном определении автокорреляционной последовательности (АКП) с последующим применением теоремы Винера-Хинчина в дискретном варианте (приложение, п.6). Оценка СПМ получается вычислением ДПФ от АКП. Этот метод называется *корреляционным.*

В любом случае мы обычно интересуемся *состоятельными оценками* (в пределе при увеличении длины L наблюдаемой последовательности $x(k)$ смещение и дисперсия оценок должны стремиться к нулю при $L \to \infty$). К сожалению анализ этих оценок весьма труден и мы расскажем о его результатах на качественном уровне. Подробное изложение анализа можно найти в [1, 6].

11.1. Метод периодограмм оценки СПМ

По определению СПМ стационарного случайного процесса с реализацией $x(t)$ задаётся выражениемEquation Section 11

$$G(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} M\left[\left| X(f,T) \right|^2 \right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} M\left[\left| \int_0^T x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 \right]. \quad (11.1)$$

Оператор математического ожидания M здесь необходим, т. к. без него предел не сходится.

Выборочная СПМ последовательности конечной длины $x(0), x(1), ..., x(N-1)$ описывается выражением

$$\widehat{G}(f) = \frac{1}{N\Delta t} \left| X(f) \right|^2, \quad (11.2)$$

где $X(f)$ – дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ), определяемое как

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi f k\Delta t}.$$

Объединяя эти два выражения, приходим к *периодограммному методу* оценки СПМ случайной последовательности:

$$\widehat{G}(f)=\frac{1}{N\Delta t}\left|\Delta t\sum_{k=0}^{N-1}x(k)\,e^{-j2\pi fk\Delta t}\right|^2. \qquad (11.3)$$

Оценка (11.3) определяется на частотном интервале $-1/2\Delta t\le f\le 1/2\Delta t$, является периодической с периодом $f_д=1/\Delta t$ и может быть вычислена на дискретном множестве из N эквидистантных частот ДПФ $f_n=n\Delta f$, $\Delta f=(1/N\Delta t)$ Гц:

$$\widehat{G}(n\Delta f)=\frac{1}{N\Delta t}\left|X(n\Delta f)\right|^2=\frac{1}{N\Delta t}\left[\Delta t\sum_{k=0}^{N-1}x(k)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right]^2.$$

Отсюда

$$\widehat{G}(n\Delta f)=N\Delta t\left|X(n)\right|^2, \qquad (11.4)$$

где $X(n)$ – коэффициенты ДПФ, вычисляемые по формуле:

$$X(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x(k)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},\quad n=0,1,\ldots,N-1.$$

Благодаря вычислительной эффективности алгоритма БПФ периодограммный метод оценки СПМ получил широкое распространение.

Будучи случайной, периодограмма (11.4) нуждается в статистическом усреднении. Действительно в (11.4) опущена операция вычисления математического ожидания, предусмотренная выражением (11.1). Поэтому для сглаживания периодограммы необходимо применять что-то вроде псевдоусреднения по ансамблю. Процедура усреднения значительно упрощается, если процессы обладают свойством *эргодичности.* Это свойство означает, что почти каждый член ансамбля ведет себя в статистическом смысле так же, как и весь ансамбль. Таким образом, можно проанализировать статистические характеристики процесса путем усреднения по времени вдоль одной реализации. Условие эргодичности случайного процесса включает в себя и условие стационарности. Ниже мы рассмотрим два практических метода получения сглаженной оценки СПМ. В методе Бартлетта [6] производится усреднение по множеству периодограмм, получаемых по неперекрывающимся сегментам исходной последовательности $x(k)$. В методе Уэлча [1] подход Бартлетта применяется к перекрывающимся сегментам и вводится окно данных для уменьшения смещения оценок из-за эффекта просачивания (п. 8).

Метод Бартлетта

Пусть заданы шаг дискретизации Δt анализируемого процесса $x(t)$ и число отсчетов L действительной последовательности $x(k)$. Выделим следующие этапы вычисления СПМ:

Спектральный анализ случайных последовательностей методом ДПФ

1) Разделим последовательность $x(k)$ на P неперекрывающихся сегментов по N отсчетов в каждом (рис. 11.1), т. е. $L = P \cdot N$. Выбор $N = 2^{\nu}$, ν – целое, позволяет использовать стандартный алгоритм БПФ.

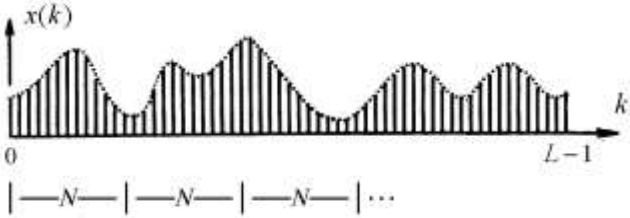

Рис. 11.1. Секционирование входной последовательности
при вычислении СПМ по методу Бартлетта

2) Вычисление ДПФ последовательности по каждому сегменту

$$X_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_p(k\Delta t)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad (11.5)$$

где $x_p(k) = x(pN+k)$, $p = 0, 1, 2, \ldots P-1$.

3) Расчет периодограмм

$$\hat{G}_p(n\Delta f) = N\Delta t\left|X_p(n)\right|^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \qquad (11.6)$$

где $\Delta f = 1/N\Delta t$ – шаг сетки частот при ДПФ. Оценка (11.6) является «сырой» оценкой СПМ, нуждающейся в сглаживании.

4) Расчет усредненной оценки СПМ

$$\hat{G}(n\Delta f) = \frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1} \hat{G}_p(n\Delta f) \qquad (11.7)$$

Выражение (11.7) можно рассматривать как выборочное среднее совокупности из P независимых измерений СПМ. Это приближённо выполняется, если корреляция между отсчётами $x(k)$ и $x(k+m)$, разнесёнными на интервал $m \geq N$ мала.

5) Расчет статистической точности. *Среднее значение оценки* (11.7) определяется выражением

$$M\{\hat{G}(n\Delta f)\} = \frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1} M\{\hat{G}_p(n\Delta f)\}. \qquad (11.8)$$

Возможное смещение оценки обусловлено действием прямоугольного окна $w(k)$, которое смещает выборочный спектр каждого отдельного сегмента.

Спектральный анализ случайных последовательностей методом ДПФ

Минимальная ширина спектральных пиков взвешенной прямоугольным окном последовательности определяется шириной главного лепестка функции

$$W(f)=\Delta t\sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-j2\pi f k\Delta t}=\Delta t e^{-j\pi f(N-1)\Delta t}\frac{\sin \pi f N\Delta t}{\sin \pi f\Delta t}. \quad (11.9)$$

и не зависит от исходных данных. Боковые лепестки спектрального окна $W(f)$, называемые *просачиванием*, будут также изменять амплитуды соседних спектральных пиков, что может привести к дополнительному смещению по частоте (п. 7). Можно показать [1], что среднее значение периодограммы определяется выражением

$$M\{\hat{G}(n\Delta f)\}=\int_{-f_д/2}^{f_д/2}|W(f)|^2 G(n\Delta f-f)df, \quad (11.10)$$

где $G(f)$ – истинная спектральная плотность мощности анализируемого процесса с отсчётами $x(k)$. Из (11.10) следует, что умножение последовательности $x(k)$ на функцию окна $w(k)$ в частотной области приводит к периодической свёртке СПМ анализируемого процесса с квадратом модуля ДВПФ оконной функции. Если истинный спектр процесса сосредоточен в узкой полосе, то такая операция приводит к просачиванию мощности в соседние частотные участки. Это явление, названное *просачиванием* (или утечкой) мощности является следствием взвешивания отсчётов. Утечка ухудшает точность оценивания СПМ и обнаруживаемость синусоидальных составляющих анализируемого процесса. Боковые лепестки из соседних частотных ячеек складываются или вычитаются с главным лепестком отклика в других частотных ячейках спектра, влияя тем самым на оценку СПМ в этой ячейке разрешения.

Дисперсия усредненной оценки

$$\sigma_{\hat{G}}^2 \approx \frac{G^2(n\Delta f)}{P} \quad (11.11)$$

обратно пропорциональна числу сегментов. При этом мы предполагаем, что периодограммы сегментов статистически независимы, что справедливо, если значения автокорреляции $r_{xx}(m)$ малы при $m>N$.

Что касается разрешения, то оно в результате разбиения на сегменты по N отсчетов будет $\Delta f=(1/N\Delta t)>(1/L\Delta t)$, т. е. будет ухудшаться. При фиксированном $L=N\cdot P$ имеет место компромиссное соотношение между разрешением $(1/N\Delta t)$ и дисперсией оценки, которая обратно пропорциональна числу сегментов $P=L/N$.

Спектральный анализ случайных последовательностей методом ДПФ

Метод модифицированных периодограмм (метод Уэлча)

Модификацией метода Бартлетта является метод Уэлча, при котором используются оконные функции и перекрывающиеся сегменты. Перед вычислением периодограммы каждого сегмента этот сегмент умножается на оконную функцию $w(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Цель применения окна ослабить эффекты из-за боковых лепестков и уменьшить смещение оценки. Однако, при этом незначительно ухудшается разрешение (по сравнению с прямоугольным окном). Цель перекрытия сегментов – увеличить число усредняемых сегментов P при заданной длине L записи данных. Тем самым уменьшается дисперсия оценки СПМ:

1) Разобьем действительную последовательность $x(k)$ на сегменты $x_p(k)$, содержащие по N отсчётов и сдвинутые относительно друг друга на D отсчетов (рис. 11.2)

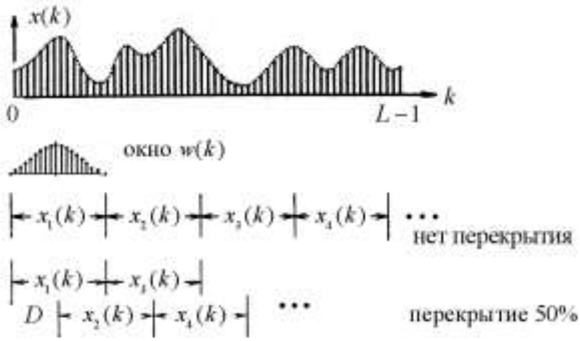

Рис. 11.2. Секционирование входной последовательности при вычислении СПМ по методу Уэлча

Тогда $x_p(k) = x\left[k + pD\right]$, $p = 0, 1, 2, \ldots P-1$, где P – число сегментов.

2) Каждый сегмент взвешивается оконной функцией $w(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

3) Вычисление ДПФ по каждому взвешенному сегменту с использованием алгоритма БПФ

$$X_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_p(k) w_p(k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad (11.12)$$

4) Расчет периодограммы

$$\hat{G}_p(n\Delta f) = \frac{N\Delta t}{U} \cdot \left|X_p(n)\right|^2 \qquad (11.13)$$

где $n\Delta f = n / N\Delta t$ – частоты ДПФ, а $U = \sum_{k=0}^{N-1} w^2(k)$ – энергия окна. Выбор оконной функции $w(k)$ обсуждается далее.

5) Вычисление сглаженной оценки СПМ

$$\hat{G}_W(n\Delta f) = \frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1}\hat{G}_p(n\Delta f) = \frac{1}{PU}\sum_{p=0}^{P-1}\left|X_p(n)\right|^2. \qquad (11.14)$$

Можно показать[6], что математическое ожидание этой оценки

$$M\left\{\hat{G}(n\Delta f)\right\} = \frac{1}{U}\int_{-f_д/2}^{f_д/2}\left|W(f)\right|^2 G(n\Delta f - f)df, \qquad (11.15)$$

где

$$W(f) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} w(k) e^{-j2\pi f k\Delta t} -$$

ДВПФ оконной функции, а $G(f)$ – истинная спектральная плотность анализируемого процесса. Из (11.15) следует, что умножение временной последовательности $x(k)$ на временное окно $w(k)$ приводит к смещению оценки СПМ.

Так же как и дисперсия периодограммы Бартлетта, дисперсия периодограммы Уэлча примерно обратно пропорциональна числу сегментов, т. е.

$$\sigma^2_{\hat{G}_W} \approx \frac{G^2(n\Delta f)}{P},$$

в предположении независимости сегментов (хотя перекрытие приводит к некоторой их взаимозависимости). Благодаря перекрытию при заданной длине L записи данных можно сформировать большее число сегментов, чем в методе Бартлетта, а это уменьшает величину дисперсии периодограммы Уэлча.

Метод Уэлча является наиболее популярным периодограммным методом спектрального анализа стационарных случайных процессов

Уэлч показал [1], что если последовательность $x(k)$ формируется из реализации гауссовского случайного процесса и $G(f)$ достаточно гладкая в диапазоне частот, где значения ДПФ окна достаточно велики, дисперсия оценки дается формулой

$$\sigma^2_{\hat{G}_W(n\Delta f)} = \frac{\left[G(n\Delta f)\right]^2}{P}\left[1 + 2\sum_{l=1}^{P-1}\frac{P-l}{P}\rho(l)\right],$$

где

$$\rho(l) = \frac{\left[\sum_{k=0}^{N-1} w(k) w(k + lD)\right]^2}{\left[\sum_{k=0}^{N-1} w^2(k)\right]^2}.$$

Практически частот используется перекрытие на 50%. Оптимальная степень перекрытия зависит от используемой весовой функции. В [6] приводятся данные о том, что для гауссовских случайных процессов при использовании окна Ханна минимальная дисперсия оценки СПМ получается при перекрытии сегментов на 65%. При этом величина дисперсии увеличивается примерно на 8% при использовании 50%-го перекрытия сегментов.

11.2. Корреляционный метод оценки СПМ

Этот метод оценки СПМ, основан на использовании теоремы Винера – Хинчина, которая в дискретном варианте (см. Приложение 1, п. п. 5-6) записывается в виде

$$\widehat{G}_x(f) = \Delta t \sum_{m=-M}^{M} \widehat{R}_x(m) e^{-j2\pi f m \Delta t}, \qquad (11.16)$$

где $-1/2\Delta t \le f \le 1/2\Delta t$, а $\widehat{R}_x(m)$ – несмещённая оценка автокорреляционной последовательности (АКП)

$$\widehat{R}_x(m) = \frac{1}{L-m} \sum_{k=0}^{L-m-1} x(k)\, x^*(k+m), \qquad (11.17)$$

где $x(k)$ – анализируемая последовательность длиной в L отсчётов, $m = 0, 1, ..., M$; $M \le L-1$. Оценки $\widehat{R}_x(m)$ для отрицательных значений m получаются в соответствии с выражением

$$\widehat{R}_x(-m) = \widehat{R}_x^*(m) \qquad (11.18)$$

вследствие свойства комплексно-сопряжённой симметрии автокорреляционной функции стационарного случайного процесса. Далее мы будем рассматривать действительные последовательности, для которых выражения (11.17) и (11.18) принимают вид

$$\widehat{R}_x(m) = \frac{1}{L-m} \sum_{k=0}^{L-m-1} x(k)\, x(k+m), \qquad (11.19)$$

$$\widehat{R}_x(-m) = \widehat{R}_x(m). \qquad (11.20)$$

Будем считать, что сначала оценивается АКП по формуле (11.19), а затем вычисляется оценка СПМ с использованием (11.16).

Определение объема выборки

Шаг дискретизации. Выберем

$$\Delta t \le \frac{1}{2 f_c},$$

где f_c – высшая частота в спектре сигнала $x(t)$, прошедшего через ФНЧ с частотой среза f_c. Это теоретическое требование. Для более точного вычисления АКП следует принимать

$$\Delta t = \frac{1}{4 f_c}.$$

Число шагов АКП. Выберем максимальное число шагов

$$M = \frac{1}{\Delta f_э \cdot \Delta t}, \tag{11.21}$$

где $\Delta f_э$ — желаемая эквивалентная разрешающая способность при расчете СПМ.

Объем выборки L *и длина реализации T.* Примем объем выборки L таким, что

$$L = \frac{M}{\varepsilon^2}, \tag{11.22}$$

где

$$\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2_{\hat{G}_x}}{G_x^2(f)} \tag{11.23}$$

нормированная среднеквадратичная ошибка, задаваемая при расчете спектра. Соответствующая длина реализации

$$T = L\Delta t\ . \tag{11.24}$$

Нормированная среднеквадратичная ошибка определяется выражением

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{L}{M}}. \tag{11.25}$$

Вычисление автокорреляционной последовательности

Итак, имеется действительная последовательность $x(k)$ конечной длины L, соответствующая реализации эргодического случайного процесса с нулевым средним. Оценка АКП при сдвиге $m\Delta t$ находится в виде

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{L-m} \sum_{k=0}^{L-1-m} x(k)x(k+m), \quad m = 0, 1, 2, \ldots M-1. \qquad (11.26)$$

Это несмещенная оценка АКП, т. е. оценка не смещается, если в качестве делителя брать не общее число отсчётов, а число ненулевых членов суммы задержанных произведений.

Максимальное число шагов M определяет эквивалентную разрешающую способность при оценке СПМ

$$\Delta f_э = \frac{f_c}{M} = \frac{1}{\tau_{\max}}. \qquad (11.27)$$

Заметим, однако, что дополнив $\hat{R}_x(m)$ нулями и выполнив ДПФ, можно получить оценку СПМ с произвольным частотным разрешением. Если $R_x(m)$ является хорошей оценкой АКП с малой дисперсией, то и ДПФ от $\hat{R}_x(m)$ также будет хорошей оценкой СПМ. При этом следует выбирать

$$M \ll L, \qquad (11.28)$$

чтобы ошибка оценки СПМ была минимальной. С другой стороны, для получения высокой разрешающей способности (малой $\Delta f_э$) следует выбирать M большим. Таким образом, при выборе M приходится принимать компромиссное решение. Практически M выбирается не более $L/10.$ Это объясняется тем, что оценка АКП, определяется формулой (11.26), требует некоторого сглаживания оценки СПМ, как будет рассмотрено ниже.

ДПФ и связанные с ним алгоритмы БПФ (п. 10) можно использовать для эффективного вычисления $\hat{R}_x(m),$ если заметить, что эта последовательность является апериодической дискретной свёрткой конечных последовательностей $x(k)$ и $x(-k).$

Рассмотрим действительную последовательность $x(k)$, у которой $x(k) = 0$ при $k < 0$ и $k \geq L.$ Пусть $X(n)$ – её N-точечное ДПФ, причём $N > L.$ Умножив его на $X^*(n),$ мы получим $|X(n)|^2$, что соответствует *циклической* свёртке конечных последовательностей $x(k)$ и $x(-k)_N$, т. е. *циклической* автокорреляции.

Последовательность $x(k)$ можно дополнить нулями и вычислять циклическую автокорреляцию на промежутке $0 \leq m \leq M-1$ как апериодическую [1, 10]. Чтобы подобрать количество точек N ДПФ, обратимся к рис. 11.3. На рис. 11.3*а* изображены две последовательности $x(k)$ и $x(k+m)$ при некотором положительном значении $m.$ Последовательности $x(k)$ и $x(k+m)_N$, участвующие в вычислении циклической автокорреляции и соответствующие квадрату $|X(n)|^2$, приведены на рис. 11.3*б*. Из этого рисунка видно, что циклическая автокорреляция будет совпадать с $(L-m)\hat{R}_x(m)$ при $0 \le m \le M-1$, если

$$N \ge L+M-1. \tag{11.29}$$

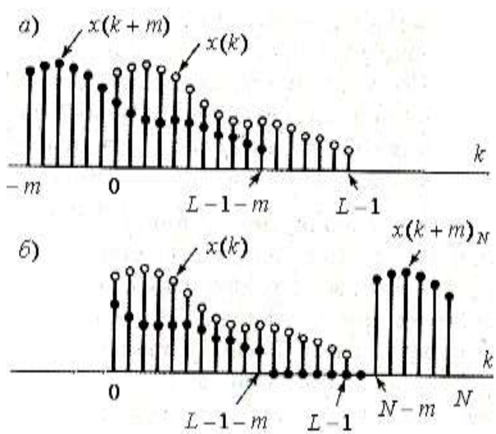

Рис. 11.3. Вычисление циклической корреляции

Таким образом, значения $\hat{R}_x(m)$ при $0 \le m \le M-1$ можно вычислить по следующей схеме:

1. Увеличиваем длину последовательности $x(k)$, продолжая её $(M-1)$ нулевыми отсчётами. Длина дополненной последовательности становится равной $N = L+M-1$, что удовлетворяет условию (11.29).

2. Вычисляем *N*-точечное ДПФ дополненной последовательности

$$X_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

3. Вычисляем

$$|X(n)|^2 = X(n)X^*(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

4. Вычисляем обратное ДПФ от $|X(n)|^2$

$$\tilde{r}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|X(n)\right|^2 e^{j\frac{2\pi}{N}nm}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, M-1. \quad (11.30)$$

5. Умножаем вычисленную последовательность на масштабирующий множитель $1/(L-m)$ и приходим к оценке АКП

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{L-m}\tilde{r}(m), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, M-1. \quad (11.31)$$

Для отрицательных значений m эта оценка распространяется с учётом свойства (11.20).

Оценка СПМ

«Первичная» оценка $\tilde{G}_x(f)$ истинной спектральной плотности $G_x(f)$ для произвольных значений f диапазона $-f_c \le f \le f_c$ определяется по АКП $\tilde{R}_x(m)$ в виде

$$\tilde{G}_x(f) = \Delta t \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \tilde{R}_x(m)e^{-j2\pi f m\Delta t}.$$

Практически для действительных последовательностей значения функции $\tilde{G}_x(f)$ рассчитываются только для M дискретных частот

$$f_n = \frac{n f_c}{M}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots M-1. \quad (11.32)$$

Это сетка частот ДПФ размером M. В результате будет получено M независимых оценок СПМ, поскольку оценки, отстоящие друг от друга менее чем на f_c / M, будут коррелированы. Для этих дискретных частот «первичная» оценка СПМ

$$\tilde{G}(f_n) = \tilde{G}\left(\frac{n f_c}{M}\right) = \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{R}_x(m)e^{-j\frac{2\pi}{M}nm} \quad (11.33)$$

может быть вычислена с использованием БПФ. Таким образом, оценка спектра осуществляется через преобразование усечённой последовательности $\hat{R}_x(m)$, что может вызвать чрезмерные пульсации в частотной области. Сглаженную оценку СПМ можно найти, используя различные оконные функции $w(m)$. Очень удобным является окно Ханна (см. п. 8)

$$w(m) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2m\pi}{N}\right), & m = 0, 1, 2, \ldots N-1, \\ 0 & \text{при других } m. \end{cases}$$

Тогда сглаженная оценка СПМ будет

$$\tilde{\tilde{G}}_x(f_n) = \tilde{\tilde{G}}_x\left(\frac{n f_c}{M}\right) = \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} w(m)\tilde{R}_x(m) e^{-j\frac{2\pi}{M}nm}. \qquad (11.34)$$

где $\tilde{R}_x(m)$ определяется из (11.30) и (11.31). Для этого окна на M частотах $f_n = n f_c / M$, $n = 0, 1, 2, \ldots, M-1$, получаем сглаженные оценки

$$\tilde{\tilde{G}}_x(0) = 0,5\hat{G}_x(0) + 0,5\hat{G}_x(f_1),$$

$$\tilde{\tilde{G}}_x(f_n) = 0,25\tilde{G}_x(f_{n-1}) + 0,5\tilde{G}_x(f_n) + 0,25\tilde{G}_x(f_{n+1}), \quad n = 1, 2, \ldots M-1,$$

$$\tilde{\tilde{G}}_x(f_{M-1}) = 0,25\tilde{G}_x(f_{M-2}) + 0,5\tilde{G}_x(f_{M-1}).$$

Сглаженная оценка (11.34) относится к числу хороших спектральных оценок.

Задача к лекции 13 марта 2017г.

1. Непрерывный стационарный случайный сигнал обладает узкополосной спектральной плотностью мощности, равной нулю при $|f| \geq 10$ кГц. На интервале в 10 с сигнал подвергается дискретизации с частотой 20 кГц, после чего спектральная плотность мощности оценивается методом усреднённых периодограмм (методом Бартлетта).

а) Чему равна длина последовательности L?

б) При вычислении периодограмм используется алгоритм БПФ с основанием 2. Пусть длина сегментов сигнала совпадает с размерностью ДПФ и равна N. При каком наименьшем значении N расстояние между частотами, в которых вычисляется спектральная оценка, не превышает 10 Гц?

в) Какое число сегментов P будет иметь сигнал, если отдельные его участки не перекрываются?

г) Нам хотелось бы уменьшить дисперсию оценки в 10 раз, сохранив расстояние между частотами из п. б) задачи. Сформулируйте два метода достижения поставленной цели. Сравнить эти методы.