3. Окна при спектральном анализе методом ДПФ

Особенности применения окон

Рассмотрим последовательные этапы получения оценки спектра методом ДПФ. При дискретизации сигнала $x(t)$ с шагом Δt спектр $X(f)$ переходит в периодически продолженный $X_{п}(f)$ с периодом $f_{д}=1/\Delta t.$ Для такого периодического продолжения ряд Фурье будет

$$X_{п}(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}\, e^{-j2\pi f k\Delta t}, \qquad (3.1)$$

где коэффициенты Фурье равны

$$a_{-k}=\frac{1}{f_{д}}\int_{-f_{д}/2}^{f_{д}/2} X(f)\, e^{j2\pi f k\Delta t} df=\Delta t\, x(k\Delta t),$$

то есть

$$X_{п}(f)=\Delta t\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k\Delta t}. \qquad (3.2)$$

Если спектр $X(f)$ ограничен по частоте, то эффект наложения будет отсутствовать при $\Delta t \le 1/2 f_{в}$, и один период функции $X_{п}(f)$ совпадает с $X(f)$. При ДПФ последовательность данных должна иметь конечную длительность $T=N\Delta t$, поэтому оценкой спектра будет

$$X_{п}^{а}(f)=\Delta t\sum_{k=-N/2}^{N/2} x(k\Delta t)\cdot e^{-j2\pi f k\Delta t}. \qquad (3.3)$$

Для улучшения сходимости здесь применяют окна $w(k\Delta t)$

$$X_{п}^{б}(f)=\Delta t\sum_{k=-N/2}^{N/2} \left\{x(k\Delta t)\cdot w(k\Delta t)\right\} e^{-j2\pi f k\Delta t}. \qquad (3.4)$$

Во многие руководства и библиотеки стандартных программ включены окна, обладающие четной симметрией относительно нуля. Поскольку для ДПФ требуется периодичность временного ряда $\left\{x(k)\cdot w(k)\right\}$, последнюю правую точку мы должны опустить и считать начальной точкой следующего периода продолжения этой последовательности, т. е. ряд с опущенной правой точкой будет

$$X_{п}^{в}(f)=\Delta t\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \left\{x(k\Delta t)\cdot w(k\Delta t)\right\} e^{-j2\pi f k\Delta t}. \qquad (3.5)$$

Желательно при обработке, чтобы индексы начинались с нуля:

$$X_{п}^{г}(f)=\Delta t\sum_{k=0}^{N-1} \left\{x(k\Delta t)\cdot w(k\Delta t)\right\} e^{-j2\pi f k\Delta t}. \qquad (3.6)$$

Коэффициенты ДПФ, т. е. ряд отсчетов спектра с интервалом
$\Delta f=1/T=1/N\Delta t$, будут

$$X(n)=X_{п}^{г}(n\Delta f)/T=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left\{x(k)w(k)\right\} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}. \qquad (3.7)$$

Таким образом, временное окно для ДПФ отличается от стандартного отсутствием четной симметрии на интервале N (из-за отбрасывания крайней правой точки) и сдвигом на $N/2$ отсчетов вправо. По этой причине соответствующее спектральное окно будет иметь фазовый множитель

$e^{-j2\pi f\frac{N-1}{2}\Delta t}$. Часто эти моменты ошибочно не учитывают или учитывают неправильно в частности тогда, когда умножение на весовую функцию во временной области заменяют сверткой в спектральной.

Замечание. Если исключить отсчёт $w(0)$, то оставшиеся отсчёты симметричны на интервале $[1, N-1]$

$$w(k) = w(N-k),\ k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Ниже приведены примеры оконных функций для ДПФ [1]. Слева на рисунках показан вид $w(k)$, а справа нормированная амплитудно-частотная характеристика в дБ $\left(20\lg\left|W(\nu)/W(0)\right|\right)$.

Прямоугольное окно

Стандартное окно с четной симметрией

$$w_{\text{ст}}(k) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad -\dfrac{N}{2} \le k \le \dfrac{N}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \text{других} \quad k. \end{cases} \tag{3.8}$$

ДВПФ этого окна

$$W_{\text{ст}}(\nu) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} w_{\text{ст}}(k)\, e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=-N/2}^{N/2} e^{-j2\pi\nu k}.$$

Суммируя $N+1$ членов этой геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{-j2\pi\nu}$, будем иметь

$$\begin{gathered} W_{\text{ст}}(\nu) = \frac{a_1\left(1-q^{N+1}\right)}{1-q} = \frac{e^{j2\pi\nu\frac{N}{2}}\left(1-e^{-j2\pi\nu(N+1)}\right)}{1-e^{-j2\pi\nu}} = \\ \frac{e^{j\pi\nu N} e^{-j\pi\nu(N+1)}\left[e^{+j\pi\nu(N+1)} - e^{-j\pi\nu(N+1)}\right]}{e^{-j\pi\nu}\left(e^{+j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}\right)} = \frac{\sin \pi\nu(N+1)}{\sin \pi\nu} = \mathrm{Q}_0(\nu). \end{gathered} \tag{3.9}$$

Здесь $\mathrm{Q}_0(\nu) = \dfrac{\sin \pi\nu(N+1)}{\sin \pi\nu}$ – так называемое ядро Дирихле.

Для превращения этого окна в окно для ДПФ необходимо отбросить крайнюю правую точку и сдвинуть последовательность на $N/2$ отсчетов вправо

$$w(k) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le k \le N-1, \\ 0 & \text{при} \quad \text{других} \quad k. \end{cases} \tag{3.10}$$

Соответствующее спектральное окно будет

$$\begin{gathered} W(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k} = \frac{1-e^{-j2\pi\nu N}}{1-e^{-j2\pi\nu}} = \\ \mathrm{Q}(\nu) = e^{-j\pi\nu(N-1)}\mathrm{Q}_0(\nu). \end{gathered} \tag{3.11}$$

Таким образом, спектральное окно ДПФ отличается от спектрального симметричного окна наличием фазового множителя $e^{-j\pi\nu(N-1)}$ из-за отбрасывания крайней правой точки и сдвига вправо на $N/2$ отсчетов (рис. 3.1).

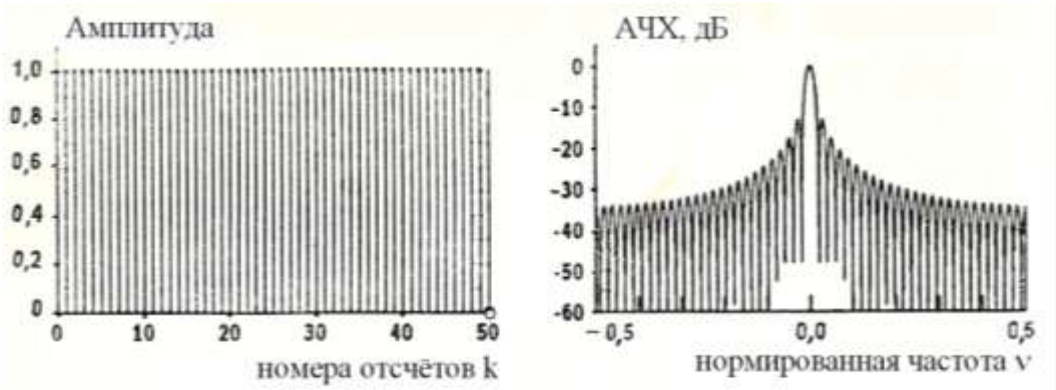

Рис. 3.1. Прямоугольное окно ДПФ и его нормированная АЧХ для $N = 50$

Характеристики спектрального окна ДПФ:

- ширина главного лепестка (между пересечениями нуля) равна 2 бина (1 бин $= 1/N$);
- уровень максимального бокового лепестка –13,6 дБ;
- полоса по уровню 0,7 составляет 0,89 бина;
- скорость спада амплитуды боковых лепестков составляет 6 дБ/октава.

Треугольное окно (окно Бартлетта)

Стандартное симметричное окно

$$w_{\text{ст}}(k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2|k|}{N}, & k = -\dfrac{N}{2}, \ldots 0, \ldots \dfrac{N}{2}, \\ 0 & \text{при других } k. \end{cases} \tag{3.12}$$

Это окно можно рассматривать как свертку двух прямоугольных окон длительностью $N/2$ отсчетов каждое. Поэтому нормированное спектральное окно Бартлетта будет

$$W_{\text{ст}}(\nu) = \frac{2}{N} Q_0^2(\nu) = \frac{2}{N} \left(\frac{\sin \pi\nu (N/2+1)}{\sin \pi\nu} \right)^2. \tag{3.13}$$

Треугольное окно для ДПФ

$$w(k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2|k - N/2|}{N}, & k = 0, 1, 2, \ldots N-1, \\ 0 & \text{при других } k. \end{cases} \tag{3.14}$$

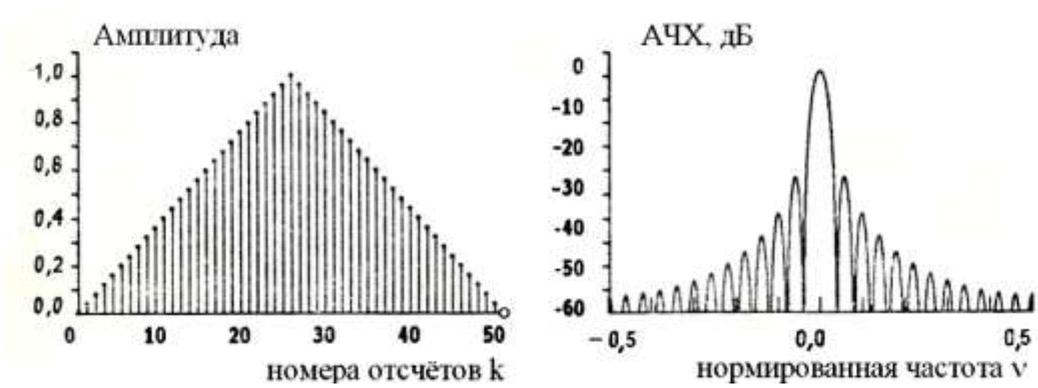

Рис. 3.2. Треугольное окно ДПФ и его нормированная АЧХ для $N = 50$

Соответствующее спектральное окно

$$W(\nu) = \frac{2}{N} e^{-j\pi\nu(N+1)} \left(\frac{\sin \pi\nu (\frac{N}{2}+1)}{\sin \pi\nu} \right)^2 . \tag{3.15}$$

Характеристики спектрального окна Бартлетта:

- ширина главного лепестка на нулевом уровне $4/N$,
- ширина главного лепестка на уровне 0,7 составляет 1,28 бина;
- относительный уровень максимального бокового лепестка (МБЛ) –26,5 дБ;
- скорость спада боковых лепестков 12 дБ/октава.

Следует отметить пониженный уровень МБЛ и расширение главного лепестка по сравнению с прямоугольным окном.

Окно Ханна

Стандартное симметричное окно

$$w_{\text{ст}}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{N}\right), & k = -\frac{N}{2}, \dots 0, \dots \frac{N}{2}, \\ 0 & \text{при других } k. \end{cases} \tag{3.16}$$

Соответствующее спектральное окно

$$W_{\text{ст}}(\nu) = \frac{1}{2} Q_0(\nu) + \frac{1}{4} Q_0\left(\nu - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{4} Q_0\left(\nu + \frac{1}{N}\right). \tag{3.17}$$

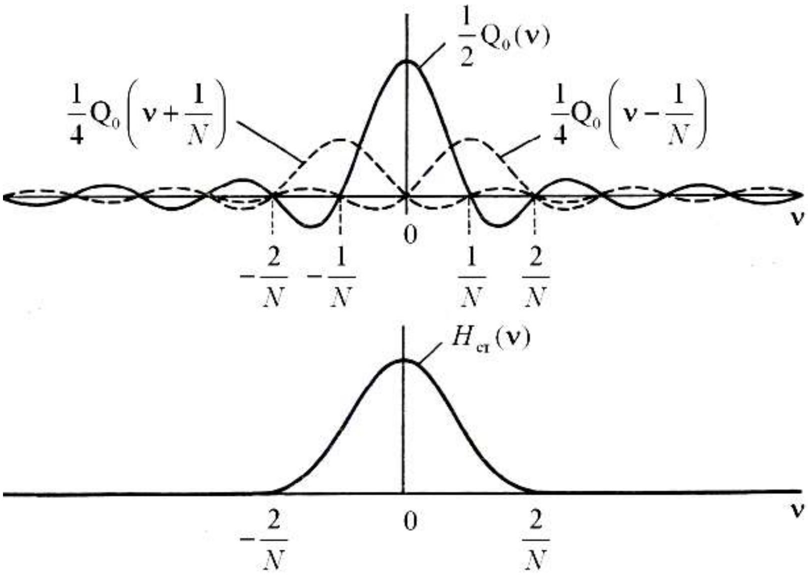

Рис. 3.3. Спектральное окно Ханна

Таким образом, спектральное окно Ханна представляет собой суперпозицию трех ядер Дирихле (рис. 3.3). Ядро Дирихле с центром в начале координат представляет собой преобразование отсчетов окна с постоянной амплитудой, равной $1/2$. Пара смещенных ядер – преобразование отсчетов, соответствующих одному периоду косинуса. Видно, что боковые лепестки смещенных ядер находятся в противофазе с боковыми лепестками центрального ядра Дирихле. В результате уровень боковых лепестков значительно понижается, ширина главного лепестка несколько расширяется.

Окно Ханна для ДПФ

$$w(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{N}\right), & k = 0, 1, 2, \ldots N-1, \\ 0 & \text{при других } k. \end{cases} \tag{3.18}$$

Соответствующе спектральное окно Ханна для ДПФ будет

$$W(\nu) = \frac{1}{2}\mathrm{Q}(\nu) - \frac{1}{4}\mathrm{Q}\left(\nu - \frac{1}{N}\right) - \frac{1}{4}\mathrm{Q}\left(\nu + \frac{1}{N}\right), \tag{3.19}$$

где

$$\mathrm{Q}(\nu) = e^{-j\pi(N-1)\nu}\,\mathrm{Q}_0(\nu). \tag{3.20}$$

При ДПФ отсчеты спектрального окна Ханна берутся в точках $\nu = n/N$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Таким образом, у спектрального окна Ханна для ДПФ имеются всего три ненулевых отсчета $1/2, 1/4$ и $1/4$(знаки отсчетов с учетом фазовых множителей), взятые соответственно в точках $0, 1/N$ и $-1/N$.

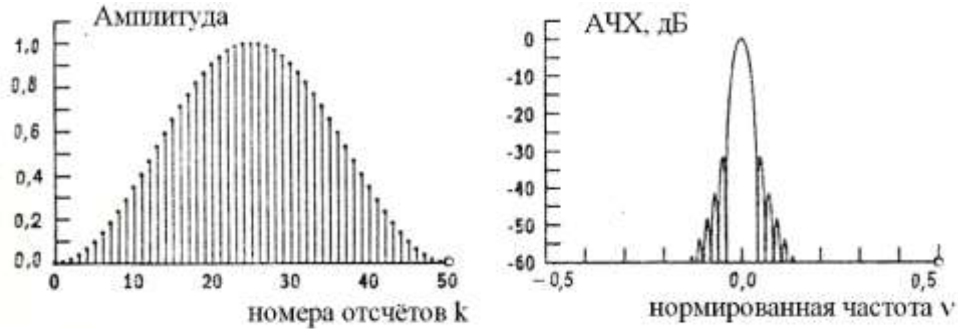

Рис. 3.4. Окно Ханна для ДПФ и его АЧХ

Спектральное окно Ханна обладает следующими свойствами (рис. 3.4):

- спектр окна не равен нулю лишь в трех отсчетных точках; величины отсчетов представляют собой двоичные дроби, операция деления на два легко выполняется простым сдвигом на один двоичный разряд вправо;
- во временной области для умножения $x(k)$ на $w(k)$, $k \in N$, требуется N трудоемких операций умножения действительных чисел, тогда как свертка $X(n)$ и $W_X(n)$ в спектральной области требует $2N$ сложения действительных чисел и $2N$ сдвигов на один двоичный разряд, что часто выполнить проще:

$$X_{\mathrm{X}}(n) = \frac{1}{2}\left\{X(n) + \frac{1}{2}\left[X(n-1) + X(n+1)\right]\right\}; \tag{3.20}$$

- еще одно достоинство окна Ханна состоит в том, что значение отсчетов $w(k)$ хранятся в памяти в виде таблиц дискретных тригонометрических функций – базисных функций ДПФ;
- для спектрального окна Ханна $W_X(\nu)$ полоса главного лепестка по уровню –3 дБ составляет 1,44 бина;
- уровень ближайших боковых лепестков –32 дБ;
- скорость спада амплитуды боковых лепестков 18 дБ/октава.

Окно Хэмминга

Симметричное:

$$w(k)=\begin{cases}0,54+0,46\cos\frac{2\pi}{N}k, -\frac{N}{2}\le k\le\frac{N}{2}, \\ 0 \quad \text{при} \quad \text{других} \quad k.\end{cases} \tag{3.21}$$

Окно Хэмминга для ДПФ:

$$w_{ДПФ}(k)=\begin{cases}0,54-0,46\cos\frac{2\pi}{N}k, & 0\le k\le N-1; \\ 0 & \text{при других } k.\end{cases} \tag{3.22}$$

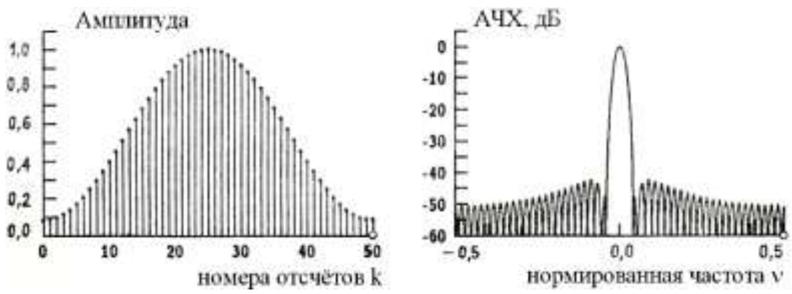

Рис. 3.5. Окно Хэмминга для ДПФ и его АЧХ

Свойства спектрального окна Хэмминга (рис. 3.5):

- ширина на уровне 0,7 1,33 бина;
- уровень максимального бокового лепестка (МБЛ) – 42 дБ;
- скорость спада боковых лепестков 6 дБ/октава

Окна Ханна и Хэмминга задаются одной формулой

$$w(k)=\begin{cases}\alpha+(1-\alpha)\cos\frac{2\pi}{N}k, \ |k|\le\frac{N}{2}, \\ 0 \qquad \text{при других } k.\end{cases} \tag{3.23}$$

При $\alpha=1/2$ получаем окно Ханна, при $\alpha=0,54$ –окно Хемминга.

Значения основных параметров рассмотренного семейства окон приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Окно	МБЛ, дБ	Скорость спада боковых лепестков, дБ/октава	Ширина полосы на уровне –3 дБ в бинах
Прямоугольное	–13,3	–6	0,89
Треугольное	–26,5	–12	1,28
Ханна	–31,5	–18	1,44
Хэмминга	–43	–6	1,30

4. О выборе оконных функций при цифровом спектральном анализе

Выбор оконной функции зависит от задачи, стоящей перед спектральным анализом. Наиболее общая постановка состоит в том, что анализируемый сигнал $x(k)$ представляет собой сумму M синусоидальных составляющих и, возможно, белого шума $x_{\text{ш}}(k)$:

$$x(k)=\sum_{m=1}^{M} A_m \sin(2\pi\nu_m k+\varphi_m)+x_{\text{ш}}(k), \tag{4.1}$$

где A_m, ν_m, φ_m – соответственно амплитуда, частота и фаза i-й синусоидальной составляющей; $k=0,1,2,\ldots,N-1.$ Исходными данными являются N отсчётов сигнала $x(k\Delta t)$, т. е. время наблюдения равно $T=N\Delta t.$ Конечность времени наблюдения составляет основную особенность спектрального анализа.

Приведём примеры конкретных задач цифрового спектрального анализа, обнаружения и оценивания параметров сигнала.

1. Пусть обрабатываемая последовательность

$$x(k)=\sum_{m=1}^{M} A_m \sin(2\pi\frac{m}{N}k+\varphi_m), \quad k=0,1,2,\ldots,N-1,$$

где A_m и φ_m – неизвестные заранее амплитуды и фазы гармонических составляющих; m – неизвестные заранее целые числа, определяющие нормированные частоты $\nu_m=m/N$ гармонических составляющих, совпадающие с бинами ДПФ. Для определения A_m и φ_m в этом случае достаточно применить прямоугольное окно $w(k)$:

$$X_w(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x(k)w(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=1}^{M}A_m\sin(2\pi\frac{m}{N}k+\varphi_m)\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{2j}\sum_{k=0}^{N-1}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}mk+\varphi_m}-e^{-j\frac{2\pi}{N}mk-\varphi_m}\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{2j}\left[\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(m-n)k+\varphi_m}-\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(N-m-n)k-\varphi_m}\right]=$$

$$=\begin{cases}\sum_{m=1}^{M}\left[X_w(n=m)=\frac{A_m}{2}e^{j(\varphi_m-\pi/2)}\right], & \text{если } n\in[0,(N/2)-1],\\ \sum_{m=1}^{M}\left[X_w(n=N-m)=\frac{A_m}{2}e^{-j(\varphi_m-\pi/2)}\right], & \text{если } n\in[N/2),\ N-1].\end{cases}$$

Отсюда находим неизвестные амплитуды и фазы:

$$A_m=2\left|X_w(n=m)\right|; \quad \varphi_m=\arg[X_w(n=m)]+\pi/2$$

2. Пусть в (4.1) $M=1,$ $x_{\text{ш}}=0,$ известна частота синусоидальной оставляющей ν_1. Требуется оценить неизвестные амплитуду A_1 и фазу φ_1 синусоидальной составляющей.

3. Пусть в (4.1) $M > 1$, $x_{ш} = 0$, известны частоты синусоидальных составляющих $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_M$. Требуется оценить неизвестные амплитуды $A_1, A_2, \ldots, A_M$ и фазы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_M$ синусоидальных составляющих.

4. Пусть в (4.1) $M = 1$, белый шум с известной дисперсией σ^2, известна частота синусоидальной составляющей ν_1. Требуется принять решение о наличии $(A_1 = 1)$ или отсутствии $(A_1 = 0)$ синусоидальной составляющей.

Ниже рассматриваются некоторые примеры выбора оконных функций.

Рассмотрим сначала подход к выбору оконной функции, исходя из допустимой погрешности определения амплитуд гармоник сигнала. Эта погрешность обусловлена:

- влиянием соседних спектральных компонент;
- паразитной амплитудной модуляцией спектра.

Согласно **п. 2** в выходной сигнал каждого полосового фильтра дают вклад все гармоники анализируемого сигнала. Этот вклад определяется степенью «просачивания» «лишних» спектральных компонент через боковые лепестки и зависит от амплитуды и фазы каждой гармоники, ее положения на сетке частот ДПФ, а также от АЧХ и ФЧХ характеристики фильтра.

Оценим среднеквадратичную относительную погрешность, вносимую соседними гармониками в анализируемую. Будем считать, что амплитуды всех соседних гармоник равны единице и что сами соседние гармоники расположены в точках частотной оси, соответствующих максимумам боковых лепестков АЧХ. Среднеквадратическая погрешность равна

$$\varepsilon^2 = 2a^2 \sum_{m=1}^{M} \left(1/m^{\alpha}\right)^2. \tag{4.2}$$

Здесь a – относительный уровень первого бокового лепестка АЧХ фильтра; $1/m^{\alpha}$ – закон спада максимумов боковых лепестков (МБЛ); m– номер бокового лепестка. Например, для прямоугольного окна в случае, когда анализируемая гармоника находится в точке $\nu = \left(n/N\right) = 1/2$, будем иметь: $a \approx 0,2$, $\alpha = 1$ и

$$\varepsilon^2 = 0,08 \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} \left(1/m\right)^2. \tag{4.3}$$

Для оконных функций, отличных от прямоугольной, достаточно учесть влияние одной гармоники с каждой стороны. Среднеквадратичная погрешность будет

$$\varepsilon^2 = 2a^2 \tag{4.4}$$

Эта погрешность будет мала для оконных функций с малым уровнем МБЛ. Поскольку для этих функций главный лепесток несколько расширяется, то в него могут попасть ближайшие гармоники. Для нормированной $W(\nu)$ среднеквадратичная погрешность в этом случае будет

$$\varepsilon_1^2 = 2\left|W\left(\frac{n}{N} - \Delta\nu_0\right)\right|^2 \tag{4.5}$$

где $\Delta\nu_0$ – расстояние между соседними гармониками в бинах ДПФ. Отсюда можно найти частотное разрешение $\Delta\nu = 1/N$, при котором

$$\frac{1}{N} < \Delta\nu_0 \text{ и } \varepsilon^2{}_1 \le \varepsilon^2 = 2a^2. \tag{4.6}$$

Паразитная амплитудная модуляция спектра

Паразитная амплитудная модуляция $K_{\text{мод}}$ характеризует амплитуду гармонического сигнала на выходе ДПФ анализатора с оконной функцией $W(\nu)$. В самом неблагоприятном случае частота сигнала находится между соседними бинами ДПФ. Величина $K_{\text{мод}}$, выраженная в децибелах, определяется как

$$K_{\text{мод}} = 20\lg \frac{W\left(\nu = \dfrac{n+1/2}{N}\right)}{W\left(\nu = \dfrac{n}{N}\right)}. \tag{4.7}$$

Для прямоугольной функции $K_{\text{мод}} = -3,92$ дБ, для треугольной $K_{\text{мод}} = -1,82$ дБ, для окна Хэмминга $K_{\text{мод}} = -1,78$ дБ.

Для снижения этой погрешности можно воспользоваться методом дополнения реализации нулями (см. п.2). Заметим, что на практике эффект модуляции не всегда опасен. Во многих случаях обрабатываемый сигнал не является чистой синусоидой и достаточно широкополосен для заполнения нескольких фильтров, что снижает этот эффект.

На практике, кроме данных об амплитудах, часто интересуются и частотами гармоник. При ДПФ моделируется сетка частот $n\Delta\nu = n/N$ по нормированной частоте (или $n\Delta f = n/N\Delta t$ по частоте в Гц). Поэтому частоты гармоник сигнала, не совпадающие с частотами сетки, могут быть определены с погрешностью $\Delta\nu = 1/N$ (или $\Delta f = 1/N\Delta t$). Уменьшить эту погрешность можно, либо увеличив интервал наблюдения $T = N\Delta t$, либо используя один из методов интерполяции коэффициентов Фурье по соседним коэффициентам ДПФ.

Эквивалентная шумовая полоса (ЭШП) оконной функции

ЭШП оконной функции с N отсчётами $\Delta\nu_{\text{ш}}$ определяется в бинах как

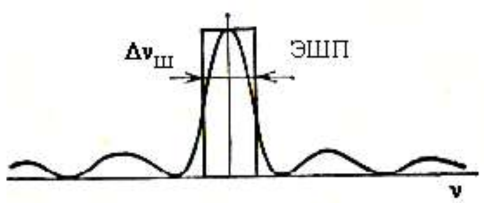

Рис. 4.1

$$\Delta\nu_{\text{ш}} = \frac{N\sum\limits_{k=0}^{N-1} w^2(k)}{\left(\sum\limits_{k=0}^{N-1} w(k)\right)^2}.$$

Эквивалентная шумовая полоса оконной функции – это ширина полосы идеального ФНЧ, у которого максимальное значение АЧХ равно значению модуля ДВПФ оконной функции, а мощность шума на выходе фильтра, равна мощности шума после обработки его оконной функцией (рис. 4.1).

Рассмотрим пример, когда обрабатываемая последовательность

$$x(k) = A_1 \sin(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m) + x_{\text{ш}}(k)$$

представляет собой сумму синусоидального сигнала с частотой $\nu = m/N$, совпадающей с бином ДПФ, и белого шума. Тогда значение $\Delta\nu_{\text{ш}}$ показывает, во сколько раз уменьшается отношение сигнал/шум после обработки входной последовательности $x(k)$ оконной функцией $w(k)$. Для прямоугольного окна $\Delta\nu_{\text{ш}} = 1$, для треугольного $\Delta\nu_{\text{ш}} = 1,33$, для окна Хэмминга $\Delta\nu_{\text{ш}} = 1,36$.

Чувствительным показателем качества оконной функции является параметр

$$\delta = \frac{\Delta\nu_{\text{ш}} - \Delta\nu_{-3\text{дБ}}}{\Delta\nu_{-3\text{дБ}}}, \tag{4.8}$$

значение которого определяет эффективность оконной функции для случая, когда входной сигнал представляется в виде (4.1), т. е. является суммой гармонических сигналов с частотами, не кратными бинам ДПФ, и белого шума. Считается [ ], что для эффективных оконных функций справедливо соотношение

$$0,04 \le \delta \le 0,055. \tag{4.9}$$

Приведём сводку характеристик распространённых окон (таблица 4.1). Из всех приведённых в таблице 4.1 окон самый узкий главный лепесток имеет АЧХ прямоугольного окна. Однако у него самый высокий уровень боковых лепестков. Подробные исследования большого числа оконных функций содержится в фундаментальной работе [1].

Т а б л и ц а 4.1

Окно	МБЛ, дБ	Скорость спада боковых лепестков, дБ/октава	Ширина полосы на уровне –3 дБ в бинах	ЭШП в бинах	$K_{\text{мод}}$ дБ	δ
Прямо-угольное	–13,3	–6	0,89	1,00	–3.92	0,12
Треуголь-ное	–26,5	–12	1,28	1,33	–1,82	0,039
Ханна	–31,5	–18	1,44	1,50		
Хэмминга	–43	–6	1,30	1,36	–1,78	0,046

Задачи к лекции 12 февраля

1. Предположим, что нужно вычислить спектральную оценку дискретного сигнала с помощью ДПФ и окна. При этом необходимо добиться разрешения не менее $\Delta\theta = \pi / 25$ $\theta = 2\pi\nu$ $\nu = f\Delta t$, а длина окна фиксирована и равна $N = 256$. Считая, что разрешающая способность совпадает с шириной главного лепестка ДВПФ образа используемого окна на уровне – 3дБ, определите, какое из окон (прямоугольное, треугольное, Ханна, Хемминга) будет удовлетворять поставленным условиям.

2. Пусть в (4.1) $M > 1$, $x_{\text{ш}} = 0$, известны частоты синусоидальных составляющих $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_M$. Выполняя ДПФ спектральный анализ, оценить неизвестные амплитуды $A_1, A_2, \ldots, A_M$ и фазы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_M$ синусоидальных составляющих.

Литература

1. *Харрис Ф. Дж.* Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье. – ТИИЭР, 1978, т. 6, № 1, с. 60 – 96.