

## Методы преобразования узкополосных радиосигналов из аналоговой формы в цифровую

Продолжаем тему. Прежде всего, дадим сводку рассмотренных на прошлой лекции методов дискретизации узкополосных радиосигналов.

### Квадратурная дискретизация

Для полосового радиосигнала

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)] = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (2)$$

квадратурные компоненты  $x_c(t) = A(t) \cos \varphi(t)$  и  $x_s(t) = A(t) \sin \varphi(t)$  представляют собой низкочастотные сигналы со спектром, ограниченным полосой  $2f_e$ , и полностью определяются последовательностями отсчетов  $\{x_c(k\Delta t)\}$  и  $\{x_s(k\Delta t)\}$ , где  $\Delta t = 1/2f_e$ .

Через квадратурные компоненты определяется комплексная огибающая радиосигнала

$$\gamma(t) = x_c(t) + jx_s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}.$$

Эта функция содержит всю обусловленную модуляцией информацию.

Таким образом, в этом методе сначала осуществляется двухканальное синхронное детектирование, а затем дискретизация квадратурных компонент с шагом  $\Delta t = 1/2f_e$  (рис. 1).

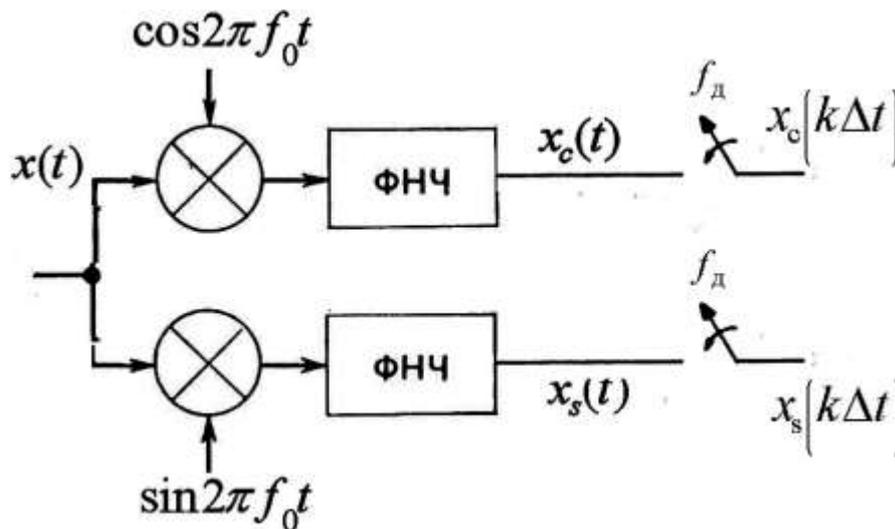


Рис. 1. Квадратурная дискретизация

Метод предполагает перенос спектра сигнала  $x(t)$  с частоты  $f_0$  на нулевую частоту и традиционно реализуется аналоговым способом, т. е. с применением аналоговых умножителей и ФНЧ. Принципиальный недостаток аналоговых способов формирования  $x_c(t)$  и  $x_s(t)$  – трудность реализации квадратурных каналов с идентичными и стабильными характеристиками. Кроме того, небольшой динамический диапазон аналоговых умножителей снижает эффективность использования многоразрядных АЦП для оцифровки отсчетов квадратур.

В рассмотренных методах дискретизация выполняется с частотой  $f_d = 2f_e$  комплексных отсчетов в секунду ( $4f_e$  действительных отсчетов в секунду). Эта величина значительно меньше частоты  $f_d = 2(f_0 + f_e)$ , необходимой для дискретизации действительного узкополосного сигнала по теореме отсчетов.

Для восстановления исходного полосового сигнала  $x(t)$  по отсчетам  $\{x_c(k\Delta t)\}$  и  $\{x_s(k\Delta t)\}$ , сначала с помощью ИФНЧ восстанавливаются квадратуры  $x_c(t)$  и  $x_s(t)$ , а затем и сам сигнал  $x(t)$ , используя соотношение

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_g(t - k\Delta t)}{2\pi f_g(t - k\Delta t)} \cos 2\pi f_0 t - \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_g(t - k\Delta t)}{2\pi f_g(t - k\Delta t)} \sin 2\pi f_0 t. \quad (3)$$

### Формирование отсчетов квадратур из отсчётов узкополосного радиосигнала

Наличие быстродействующих АЦП, допускающих работу с частотой дискретизации 100 МГц и выше, делает возможным получить цифровые отсчеты высокочастотных колебаний на выходах УПЧ трактов многих радиоприемных устройств, в том числе радиолокационных. Рассмотрим способ формирования отсчетов квадратурных компонент непосредственно из отсчетов колебания  $x(t)$  на выходе УПЧ.

Выберем шаг дискретизации  $x(t)$  равным

$$\Delta t = \frac{2n+1}{4f_0}, \quad (4)$$

где  $f_0$  – промежуточная частота,  $n$  – целое, для определенности четное, т. е.  $n=2, 4, 6, \dots$  (выбор  $n$  обсуждается далее). В соответствии с (4) шаг дискретизации  $x(t)$  выбирается нечетно-кратным четверти периода колебания промежуточной частоты  $f_0$ . Тогда с учетом (2) имеем

$$\begin{aligned} x(k\Delta t) &= x_c(k\Delta t) \cos 2\pi f_0 k\Delta t - x_s(k\Delta t) \sin 2\pi f_0 k\Delta t = \\ &= x_c(k\Delta t) \cos \pi k(n+1/2) - x_s(k\Delta t) \sin \pi k(n+1/2). \end{aligned}$$

Отдельно для четных и нечетных отсчетов получим

$$x(2k\Delta t) = x_c(2k\Delta t) \cdot (-1)^k, \quad x[(2k+1)\Delta t] = x_s[(2k+1)\Delta t] \cdot (-1)^{k+n}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x_c(2k\Delta t) &= x(2k\Delta t) \cdot (-1)^k, \\ x_s[(2k+1)\Delta t] &= x[(2k+1)\Delta t] \cdot (-1)^{k+n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, для формирования отсчетов квадратурных компонент достаточно разделить отсчеты сигнала  $x(k\Delta t)$  на чётные и нечётные и в полученных подпоследовательностях инвертировать знак каждого второго отсчета (рис. 2). Заметим, что моменты взятия отсчетов квадратурных составляющих сдвинуты на  $\Delta t$ , что может создать определенные трудности при дальнейшей обработке, т. к. в каждый дискретный момент  $t = k\Delta t$  обычно требуется пара отсчетов  $x_c(k\Delta t)$  и  $x_s(k\Delta t)$ .

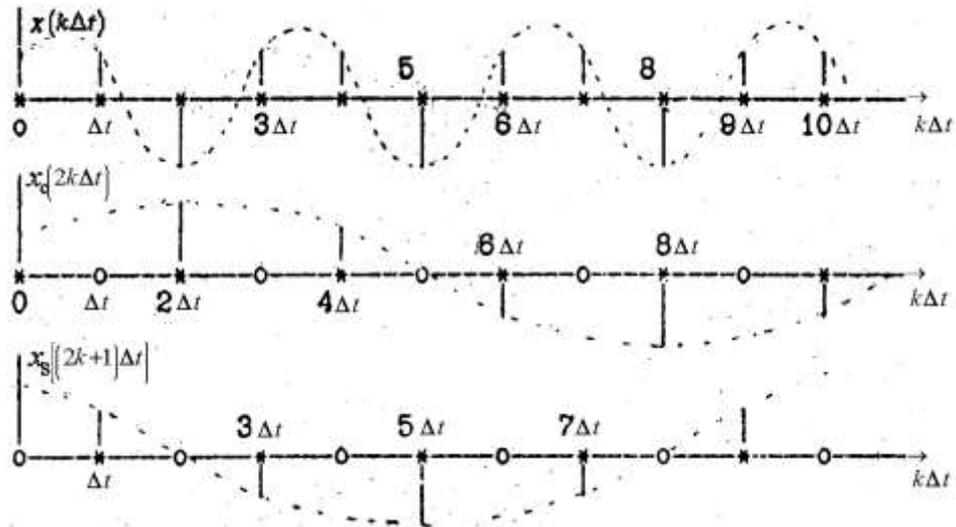


Рис. 2

Недостающие отсчеты квадратур (в точках, помеченных на рис. 2 кружками) можно получить путем интерполяции с помощью цифровых интерполирующих фильтров (ЦИФ).

Функциональная схема, реализующая рассмотренный метод формирования отсчетов квадратур, приведена на рис. 3.

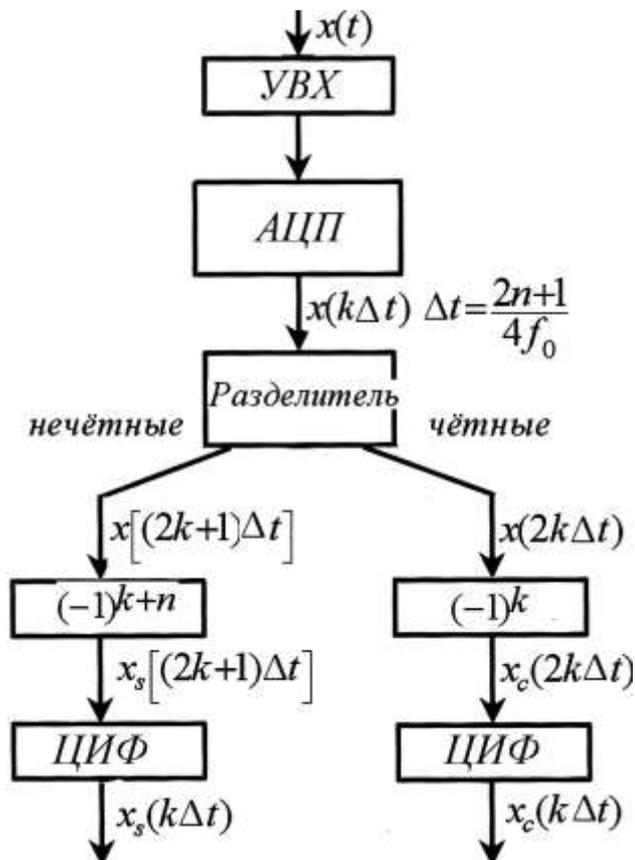


Рис. 3. Схема формирования отсчётов квадратур из отсчётов полосового колебания

Узкополосный сигнал  $x(t)$  дискретизируется с шагом  $\Delta t = \frac{2n+1}{4f_0}$  устройством выборки-хранения (УВХ). Отсчёты  $x(k\Delta t)$  после квантования в аналого-цифровом преобразователе (АЦП) разделяются на чётные и нечётные. Полученные подпоследовательности после знаковой модуляции поступают на цифровые интерполирующие фильтры (ЦИФ). Важно отметить, что один АЦП обслуживает оба квадратурных канала.

В качестве интерполяторов могут быть использованы цифровые интерполирующие фильтры нулевого и первого порядка. В первом из них недостающий отсчет берётся равным предыдущему отсчёту, например,  $x_c(3\Delta t) = x_c(2\Delta t)$ , а во втором – среднему арифметическому предыдущего и последующего отсчётов, например,

$$x_s(4\Delta t) = \frac{x_s(3\Delta t) + x_s(5\Delta t)}{2}.$$

В последнем случае каждый интерполированный отсчёт задерживается на  $\Delta t$ . Это нужно учитывать при дальнейшей обработке.

Самый простой способ интерполяции заключается в том, что недостающие отсчеты квадратур заменяются нулями. Этому методу была дана наглядную интерпретацию в частотной области.

### Дискретизация аналитического сигнала

Обратимся к рис. 4а. Естественно применить метод исключения составляющих с отрицательными частотами  $X_-(f)$ . Это эквивалентно формированию аналитического сигнала. Характерно, что спектр аналитического сигнала содержит только составляющие с положительными частотами

$$X_A(f) = 2X_+(f)$$

Аналитический сигнал по определению равен

$$x_A(t) = x(t) + jx_G(t),$$

где  $x_G(t)$  – сигнал, получаемый пропусканием  $x(t)$  через преобразователь Гильберта (линейный фильтр с передаточной функцией  $H(f) = -j \operatorname{sign} f$ ). Как отмечалось, преобразование Гильберта может быть приближенно выполнено с помощью фазовращателя, работающего в узкой полосе  $[f_0 - f_g, f_0 + f_g]$ .

При дискретизации аналитического сигнала  $x_A(t)$  с шагом  $\Delta t = 1/2f_g$  его спектр преобразуется в периодическое продолжение  $2X_+(f)$  с периодом  $f_d = 2f_g$  (рис. 4б). Так как частичные спектры  $2X_+(f \pm nf_d)$  не перекрываются, возможно точное восстановление  $x_A(t)$  по выборкам  $x_A(k\Delta t)$ .

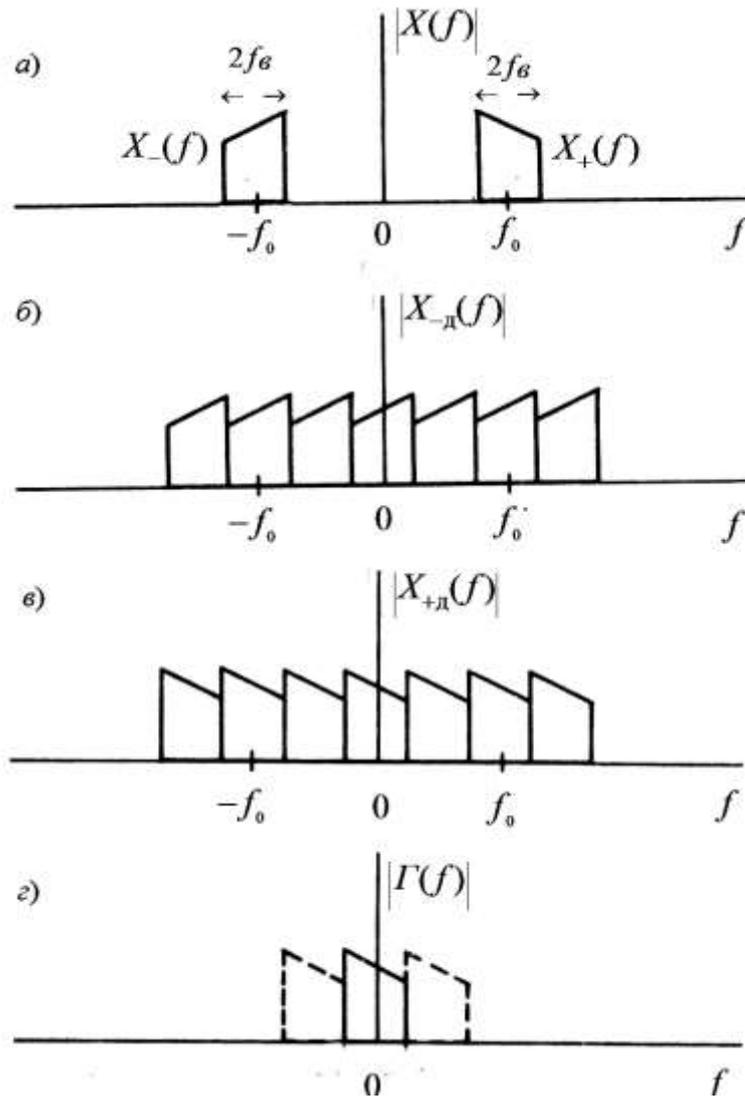


Рис. 4

На рис. 5 приведена схема дискретизации аналитического сигнала. Как видно из этого рисунка, исходный сигнал  $x(t)$  предварительно фильтруется полосовым фильтром. Это необходимо для ослабления эффекта наложения частичных спектров при дискретизации. В схеме действуют два синхронно работающих дискретизатора (АЦП), обслуживающих соответственно действительный и мнимый каналы обработки.



Рис. 5. Схема дискретизации аналитического сигнала

Для восстановления  $x_A(t)$  по выборкам  $x_A(k\Delta t)$  необходим полосовой фильтр с передаточной характеристикой

$$H(f) = \begin{cases} 1, & \text{при } f_0 - f_\epsilon \leq f \leq f_0 + f_\epsilon, \\ 0, & \text{при других } f. \end{cases}$$

Комплексная импульсная характеристика этого фильтра имеет вид

$$h(t) = \frac{\sin 2\pi f_\epsilon t}{\pi t} e^{j2\pi f_0 t}.$$

Низкочастотная копия спектра  $\Gamma(f)$  изображена на рис. 4з сплошной линией. При этом предполагается, что  $f_0/2f_\epsilon = m$ , где  $m$  – целое число. Это условие можно выполнить либо выбором  $f_0$ , либо дополнительным смещением по частоте (гетеродинированием сигнала). Низкочастотная копия спектра является спектром комплексной огибающей  $\gamma(t) = x_c(t) + jx_s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$ , которая содержит всю обусловленную модуляцией информацию.

Аналогично, исключив составляющие  $X_+(f)$ , можно сформировать сопряжённый аналитический сигнал  $x_A^*(t) = x(t) - jx_I(t)$ . При дискретизации аналитического сигнала  $x_A^*(t)$  с шагом  $\Delta t = 1/2f_\epsilon$  его спектр преобразуется в периодическое продолжение  $2X_-(f)$  с периодом  $f_d = 2f_\epsilon$  (рис. 4б).

Для восстановления  $x_A^*(t)$  по выборкам  $x_A^*(k\Delta t)$  необходим полосовой фильтр с импульсной характеристикой

$$h^*(t) = \frac{\sin 2\pi f_\epsilon t}{\pi t} e^{-j2\pi f_0 t}.$$

### Субдискретизация полосовых радиосигналов

По-прежнему рассматриваем узкополосный сигнал со спектром вида

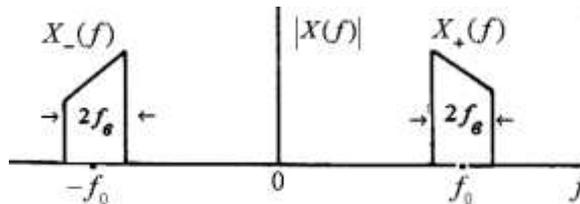


Рис. 6

Субдискретизация полосовых радиосигналов предполагает, что частота дискретизации должна быть в два раза выше не абсолютно наивысшей частоты ( $f_0 + f_\epsilon$ ), а величины, характеризующей информационную полосу  $2f_\epsilon$ , т.е.  $f_d = 4f_\epsilon$  (рис. 7).

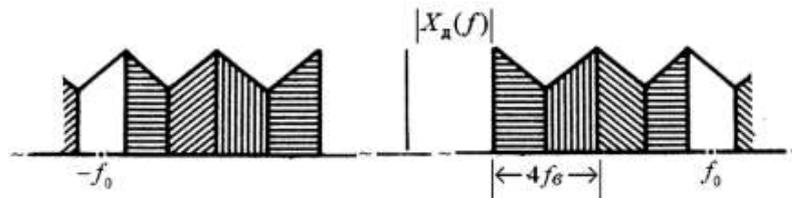


Рис. 7

Однако правильная субдискретизация налагает некоторые ограничения. Рассмотрим их подробнее.

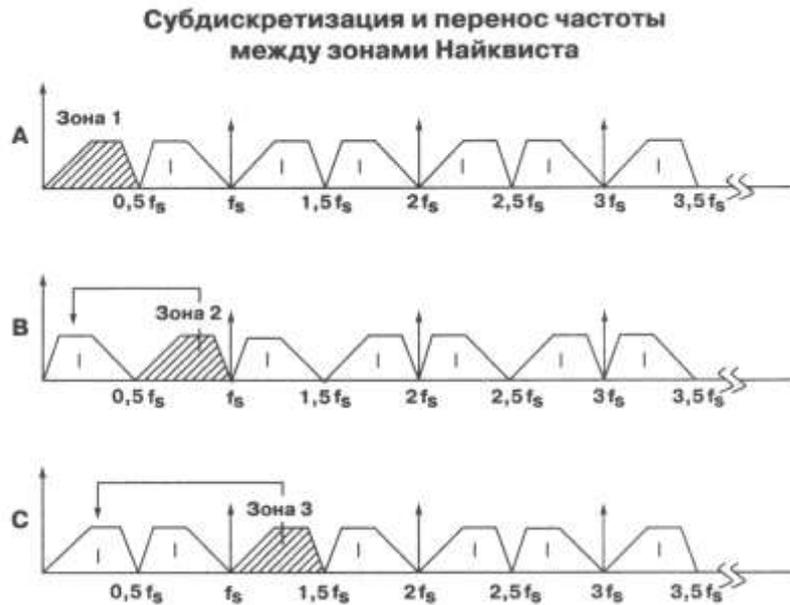


Рис. 8.

На рис. 8А представлен случай, когда полоса подлежащего дискретизации сигнала ограничена первой зоной Найквиста, а в остальных зонах имеются боковые (отражённые) частотные компоненты. На рис. 8Б представлен случай, когда полоса подлежащего дискретизации сигнала полностью находится во второй зоне Найквиста. Его изображение будет появляться в первой зоне Найквиста, потому что перенос спектра всегда сопутствует процессу дискретизации. Следует отметить, что смещенная полоса в первую зону Найквиста содержит всю информацию о спектре исходного сигнала, только порядок частотных компонентов в спектре обратный. Но это легко корректируется переупорядочиванием спектральных компонент на выходе БПФ процессора. На рис. 8В показан вариант подлежащего дискретизации сигнала, ограниченного третьей зоной Найквиста. Здесь отражение в первую зону происходит без обращения частот. Фактически полосы подлежащих дискретизации сигналов могут лежать в любой зоне Найквиста, а отражения в первую зону является точным представлением спектра сигнала (за исключением обращения частот, которое происходит, когда спектры сигналов распложены в четных зонах). Здесь можно сформулировать критерий Найквиста: для сохранения информации о сигнале частота дискретизации должна быть равной или большей, чем удвоенная ширина его полосы. **Важно отметить, что в этой формулировке нет никакого упоминания об абсолютном местоположении полосы дискретизируемых сигналов в частотном спектре относительно частоты дискретизации. Единственное ограничение состоит в том, что полоса подлежащих дискретизации сигналов ограничена одной зоной Найквиста, т.е. полосы сигналов не должны перекрывать частоту  $f_s/2$  с любым целочисленным множителем.** Фактически это обеспечивает полосовой фильтр против наложения. Дискретизация сигналов, лежащих выше первой зоны Найквиста, стала популярной задачей, связанной с телекоммуникациями, потому что этот процесс эквивалентен аналоговой демодуляции. Обычной практикой стала дискретизация сигналов ПЧ с последующим использованием цифровых методов для обработки сигнала с устранением таким способом потребности в демодуляторе ПЧ. Ясно, что с ростом ПЧ растут и требования к производительности АЦП. Ширина полосы входа АЦП должна быть адекватна скорее ПЧ, чем основной низкочастотной полосе. Это является проблемой для большинства АЦП, предназначенных для обработки сигналов в первой зоне Найквиста. Поэтому для субдискретизации нужен АЦП, который может обрабатывать сигналы в других, более высокочастотных зонах Найквиста.

Процесс дискретизации сигнала, полоса которого находится вне первой зоны Найквиста, называется *субдискретизацией*.

### Выбор частоты дискретизации

Для нахождения частоты дискретизации  $f_d$  необходимо использовать условие, что  $m$  и  $m+1$  переносов  $X_-(f)$  не дают пересечений с  $X_+(f)$ . Ясно, что при этом пересечения отсутствуют везде. Пересечения отсутствуют, если выполнены неравенства (рис. 9):

$$\begin{aligned} -f_0 + f_\epsilon + m f_d &< f_0 - f_\epsilon, \\ -f_0 - f_\epsilon + (m+1) f_d &> f_0 + f_\epsilon. \end{aligned} \quad (6)$$

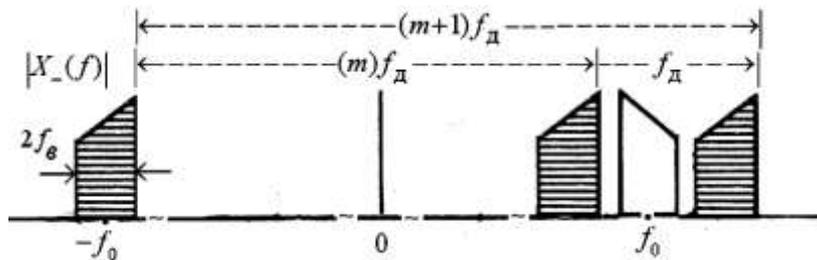


Рис. 9

Из (6) получаем

$$\begin{aligned} m f_d &< 2(f_0 - f_\epsilon), \\ (m+1) f_d &> 2(f_0 + f_\epsilon) \end{aligned}$$

или

$$\frac{2(f_0 + f_\epsilon)}{m+1} < f_d < \frac{2(f_0 - f_\epsilon)}{m}. \quad (7)$$

Субдискретизация возможна, если

$$\frac{(f_0 + f_\epsilon)}{m+1} < \frac{f_0 - f_\epsilon}{m},$$

т.е.

$$m < \frac{f_0 - f_\epsilon}{2f_\epsilon}. \quad (8)$$

Число  $m$  называется *порядком субдискретизации*.

Неравенства (7) перепишем в виде

$$\frac{\frac{f_0}{f_\epsilon} + 1}{m+1} < \frac{f_d}{2f_\epsilon} < \frac{\frac{f_0}{f_\epsilon} - 1}{m} \quad (9)$$

Введем нормированные частоты  $\nu_0 = \frac{f_0}{f_\epsilon}$  и  $\nu_d = \frac{f_d}{2f_\epsilon}$ .

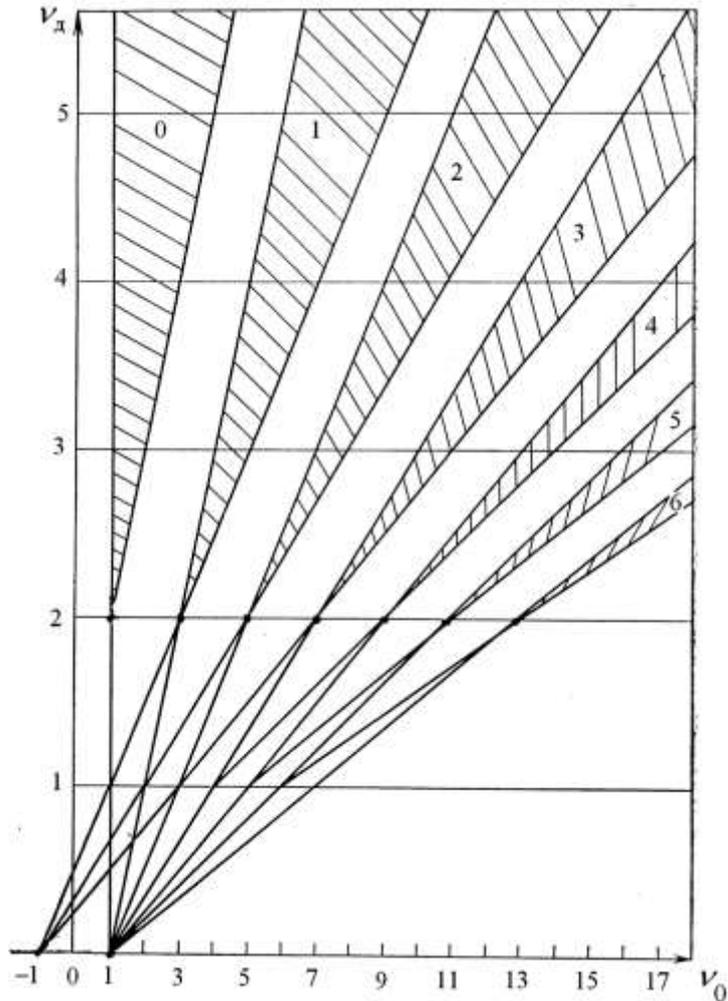


Рис. 10. Зоны для выбора частоты субдискретизации

Тогда неравенства (9) принимают вид

$$\frac{v_0 + 1}{m + 1} < v_d < \frac{v_0 - 1}{m}. \quad (10)$$

Таким образом, зная центральную нормированную частоту  $v_0 = f_0 / f_e$ , можно построить все зоны, внутри которых расположены значения  $v_d = f_d / 2f_e$  (рис.10).

Поскольку общая протяженность спектра  $X_-(f)$  и  $X_+(f)$  равна  $4f_e$ , то при отсутствии перекрытий для всех зон должно быть выполнено неравенство

$$f_d > 4f_e \text{ или } v_d > 2. \quad (11)$$

Строить зоны проще следующим образом. Отмечаются точки с координатами  $(1, 2)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(5, 2)$ ,  $(7, 2)$ , ... Эти точки соединяются прямыми с точками  $(0, -1)$  и  $(0, 1)$ . Между этими прямыми и будут находиться зоны для выбора  $v_d$  при различных  $v_0$  и  $m$ .

Практический интерес представляет выбор минимально возможной частоты дискретизации. Такой выбор соответствующей минимальной ординате выше значения  $v_d = 2$ . Например, при  $v_0 = 8$  минимальная частота дискретизации получается при выборе порядка субдискретизации  $m = 3$ . Из (10) при этих значениях  $v_0$  и  $m$  получаем

$$\frac{9}{4} < v_d < \frac{7}{3} \text{ или } 2,25 < v_d < 2,33.$$

*Замечание 1.* Выберем частоту дискретизации равной  $f_d = \frac{4f_0}{2m+1}$ . Тогда

$$v_d = \frac{f_d}{2f_0} = \frac{f_0}{f_0} \cdot \frac{2}{2m+1} = v_0 \frac{2}{2m+1}$$

– биссектрисы зон. Если  $X_+(f)$  и  $X_-(f)$  имеют симметричную форму, то при этих частотах дискретизации эффект наложения частичных спектров будет минимальным.

*Замечание 2.* Чем ниже мы спускаемся к вершине заштрихованной области, тем ниже частота дискретизации. Однако, работа на границе заштрихованной и белой областями приводит к тому, что копии спектров соприкасаются друг с другом (рис. 7). Поэтому для безопасности от наложения мы должны работать на некотором расстоянии от границ белых зон. При этом между частичными спектрами возникают свободные полосы (рис. 9) и требования к крутизне скатов спектров и стабильности частоты дискретизации становятся менее жёсткими

**Пример 1.** Рассмотрим полосовой радиосигнал, у которого  $2f_0 = 1$  МГц и  $f_0 = 100$  МГц. Тогда  $v_0 = \frac{f_0}{f_0} = 200$ . Частота дискретизации, выбираемая при прямом применении теоремы Котельникова, должна быть

$$f_d = 2(f_0 + f_0) = 2f_0(v_0 + 1) = 201 \text{ МГц.}$$

Из (8) находим для порядка субдискретизации:  $m < \frac{f_0 - f_0}{2f_0} = \frac{100 - 0,5}{1} = 99,5$ . Выберем  $m = 99$ , тогда в соответствии с (10) получаем  $2,208 < v_d < 2,211$  или  $2,208 \text{ МГц} < f_d < 2,211 \text{ МГц}$ . Выбираем частоту дискретизации равной  $f_d = 2,210 \text{ МГц}$ . (может быть получена в цифровом синтезаторе частот).

Таким образом, за счет применения субдискретизации частота  $f_d$  может быть взята значительно ниже значения, требуемого по теореме отсчетов. Ясно также, что для уменьшения  $f_d$ , порядок субдискретизации следует брать максимально возможным.

Для восстановления сигнала достаточно пропустить дискретизованный сигнал

$$x_d(t) = \Delta t \sum_k x(k\Delta t) \cdot \delta(t - k\Delta t)$$

через фильтр с частотной характеристикой, изображённой на рис. 11.

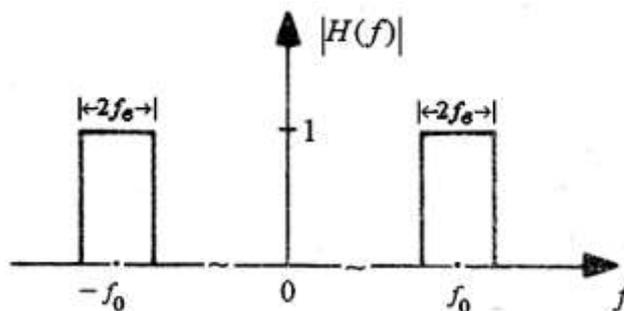


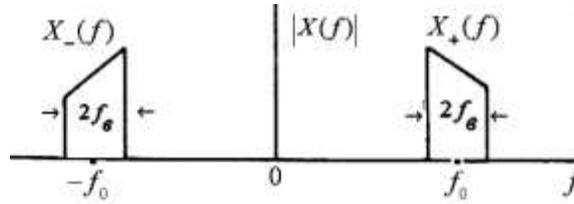
Рис. 11

Импульсная характеристика этого фильтра

$$h(t) = 2f_0 \frac{\sin 2\pi f_0 t}{2\pi f_0 t} \cos 2\pi f_0 t. \quad (12)$$

### Метод полосовой дискретизации с недостаточной выборкой для целочисленных полос.

Рассматриваем узкополосный действительный сигнал со спектром вида.



На этом рисунке изображается модуль спектра *действительного* полосового сигнала. Характерна чётная симметрия амплитудного спектра относительно оси ординат. Компонента  $X_+(f)$  носит название прямого спектра, а компонента  $X_-(f)$  – инверсного.

Если граничные частоты спектра  $f_0 - f_e$  и  $f_0 + f_e$  кратны его ширине  $2f_e$ , т. е. если

$$f_0 - f_e = m(2f_e), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

то минимальную частоту дискретизации можно взять равной

$$f_{\text{дmin}} = 4f_e. \quad (10)$$

Для этого случая периодическое повторение прямого и инверсного спектров, вызванное дискретизацией полосового сигнала, показано на рис. 12. Число  $m$  показывает сколько переносов прямого спектра нужно совершить, чтобы точка  $f_0 - f_e$  попала в начало координат. Чем больше это число, тем меньше частота дискретизации.

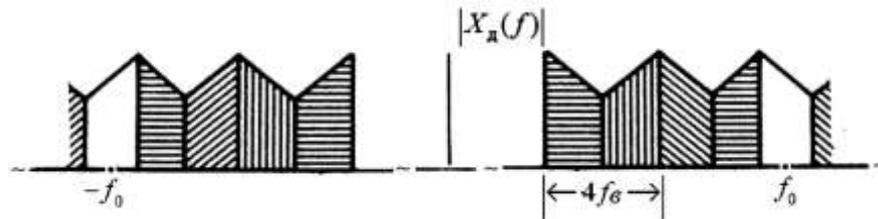


Рис. 12

Такая плотная упаковка отображений спектров  $X_+(f)$  и  $X_-(f)$  практически может быть использована при условии, что компоненты  $X_+(f)$  и  $X_-(f)$  финитные функции. В этом случае эффект наложения частичных спектров друг на друга будет отсутствовать. Этот метод дискретизации называется *полосовой дискретизацией с недостаточной выборкой для целочисленных полос*. На рис. 13 в качестве примера показано устройство предварительной обработки данных приёмника многоканальной системы связи.

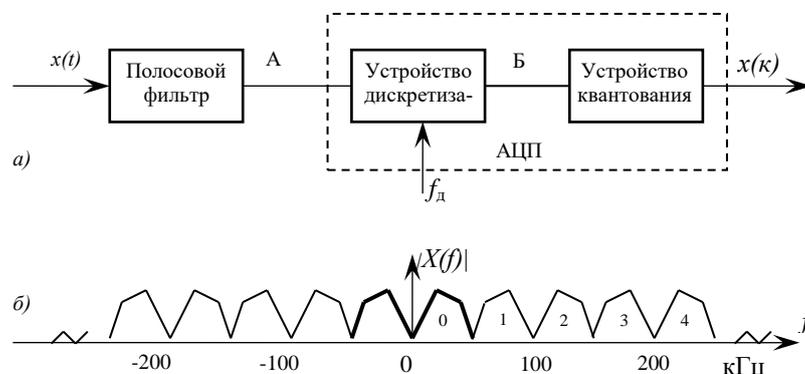


Рис. 13

Спектр принимаемого сигнала показан на рис. 13б с указанием номеров каналов. Для выделения сигнала в нужном канале перед дискретизацией с наименьшей возможной частотой служит полосовой фильтр. Будем считать его идеальным (Рис. 14).

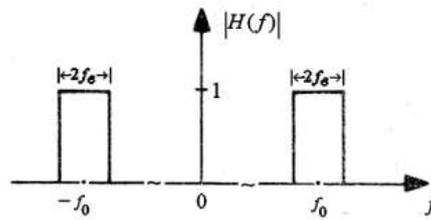


Рис. 14

### Упражнения

1. Найти минимальную частоту дискретизации  $f_{д\ min}$  для канала 4 на рис. 13. Изобразить спектр сигнала до дискретизации (точка А). Изобразить спектр дискретного сигнала (точка Б) в первой полосе Найквиста  $[-f_{д}/2, f_{д}/2]$ .

2. Реализовать полосовой сигнал для каналов 0,3,10. Найти минимальную частоту дискретизации  $f_{д\ min}$  для этих каналов. Изобразить спектр дискретного сигнала для каждого из этих каналов в первой полосе Найквиста  $[-f_{д}/2, f_{д}/2]$ .

3. Повторить пункты 1-2 для частоты дискретизации  $f_{д} = 2f_{д\ min}$ . Объяснить результат.

### Вопросы

1. Что означает порядок субдискретизации?
2. Пояснить выбор минимальной частоты дискретизации, используя зоны на рис. 9.
3. Какой частоте дискретизации соответствует биссектриса зоны?
4. В чём заключается метод полосовой дискретизации с недостаточной выборкой для целочисленных полос?
5. Выполнить упражнения 1, 2, 3 на странице 11.
6. Показать, что дискретизация сигнала, ограниченного  $n$ -той полосой Найквиста ( $n > 1$ ) эквивалентна аналоговой демодуляции.

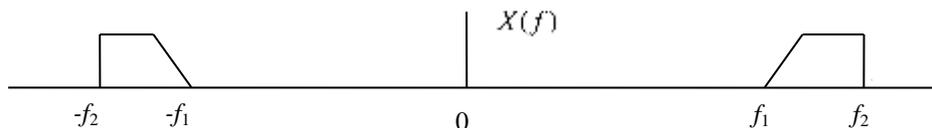
### Задачи для самостоятельного решения

1. Определить минимальную частоту дискретизации колебания

$$x(t) = A(1 + 0,5 \cos 2\pi \cdot 10^4 t) \cos 2\pi \cdot 10^6 t, \quad -\infty < t < \infty,$$

из условия последующего точного восстановления. Изобразить АЧХ идеального восстанавливающего фильтра.

2. На рисунке изображён спектр узкополосного сигнала с полосой  $B = f_2 - f_1 = 5$  МГц. Сигнал дискретизируется с частотой  $f_{д} = 2B$ .



Изобразить спектр дискретного сигнала в диапазоне  $[-f_{д}, f_{д}]$  для каждого из трёх случаев: 1)  $\frac{f_2}{B} = 3$ , 2)  $\frac{f_2}{B} = 4$ , 3)  $\frac{f_2}{B} = 4,5$ . Дать комментарии.

**Восстановление сигналов по их отсчетам путем интерполяции.**

**Примеры решения задач.**

**1. Идеальная интерполяция.**

Ряд Котельникова

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_s(t - k\Delta t)}{2\pi f_s(t - k\Delta t)} \tag{1.1}$$

означает, что значения сигнала  $x(t)$  с ограниченным спектром между отсчётными точками можно определить по выборкам  $x(k\Delta t)$  путём интерполяции с использованием функций  $\frac{\sin 2\pi f_s t}{2\pi f_s t}$ , как показано на рис. 1.1.

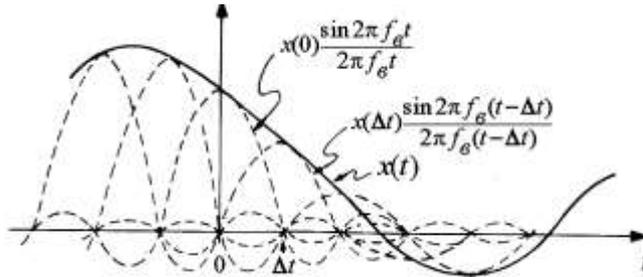


Рис. 1.1. Интерпретация формулы Котельникова как интерполяционной формулы

Восстановление исходного аналогового сигнала  $x(t)$  по его выборкам в принципе может быть осуществлено с помощью идеального фильтра нижних частот (ИФНЧ) с импульсной реакцией

$$h_0(t) = \frac{1}{\Delta t} \varphi_0(t) = 2f_s \frac{\sin 2\pi f_s t}{2\pi f_s t}, \tag{1.1}$$

имеющей бесконечную протяженность (рис. 1.2а). При этом на вход такого фильтра подается последовательность

$$\Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) \tag{1.2}$$

равноотстоящих  $\delta$ -импульсов с площадями  $\Delta t x(k\Delta t)$  (рис. 1.2б).

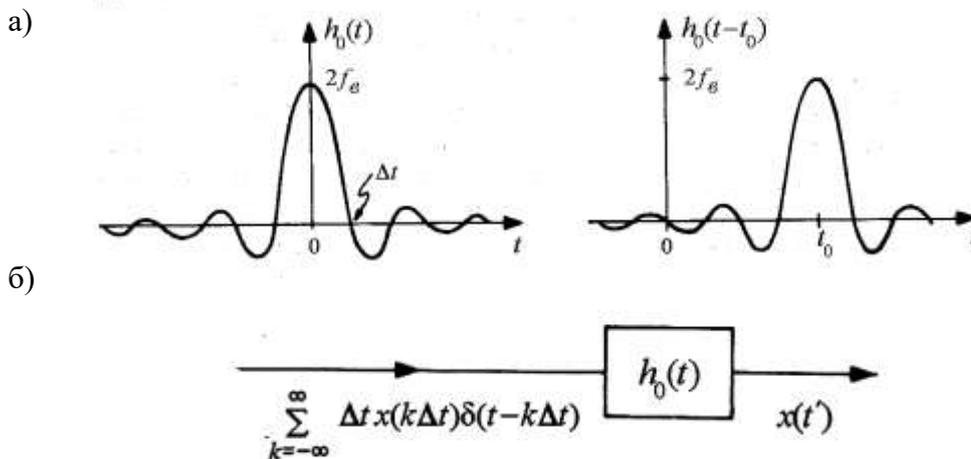


Рис. 1.2.а – импульсная характеристика ИФНЧ без задержки и с задержкой; б – схема восстановления аналогового сигнала

Интерполяционная формула Котельникова (1.1) есть по существу результат свертки

$$x(t') = \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) h_0(t' - t) dt.$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции, получаем

$$x(t') = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) h_0(t' - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_e (t' - k\Delta t)}{2\pi f_e (t' - k\Delta t)}.$$

Поскольку  $h_0(t) \neq 0$  при  $t < 0$ , то ИФНЧ не является каузальным, а потому физически не реализуем. Простым введением задержки эту проблему решить нельзя. Не существует конечных значений  $t_0$ , для которых  $h_0(t - t_0)$  была бы строго равна нулю при  $t < 0$  (рис. 1.2б)

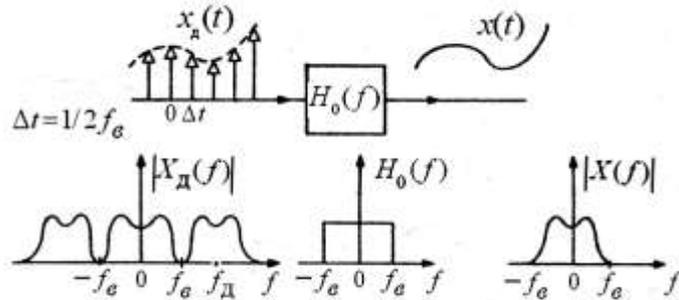


Рис. 1.3. Действие ИФНЧ в спектральной области

В спектральной области действие ИФНЧ иллюстрирует рис. 1.3. Частотная характеристика ИФНЧ  $|H_0(f)| \equiv 0$  за пределами полосы  $[-f_e, f_e]$ . Норберт Винер сказал по этому поводу следующее: «Ни один из фильтров, отвечающих условию причинности, не может иметь бесконечного затухания в конечной (ненулевой) полосе частот. Идеальный фильтр физически неосуществим из-за самой его сущности, а не по причине отсутствия необходимых технических средств».

## 2. ЦАП как интерполятор нулевого порядка

Сигнал  $x(t) = \cos 2\pi f_1 t$ ,  $-\infty < t < \infty$ , дискретизируется с шагом  $\Delta t$  так, что на одном периоде поучаются  $N$  отсчетов:

$$N\Delta t = T_1 = \frac{1}{f_1}.$$

Спектр дискретизованной косинусоиды периодичен с периодом, равным частоте дискретизации  $f_d$ .

В схеме восстановления используется интерполятор нулевого порядка (ЦАП).

*Определить частоты и амплитуды и фазы гармонических компонент на выходе интерполятора. Получить аналитическое выражение для выходного сигнала как суперпозицию этих компонент.*

Импульсная и частотная характеристики интерполятора приведены на рис. 2.1.

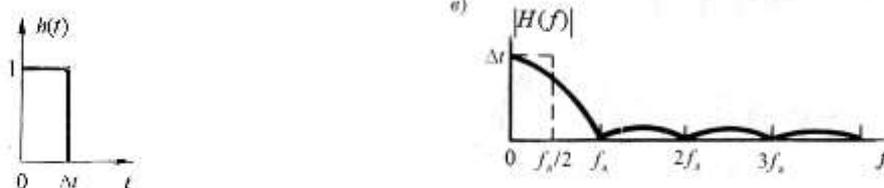


Рис. 2.1

**Решение.**

Частотная характеристика интерполятора (преобразование Фурье от  $h(t)$ )

$$H(f) = \Delta t \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} e^{-j\pi f \Delta t}, \quad \Delta t = 1/f_d, \quad (2.1)$$

Модуль этой характеристики (АЧХ) показан на рис. 2.1 и на рис. 2.2 (пунктиром)

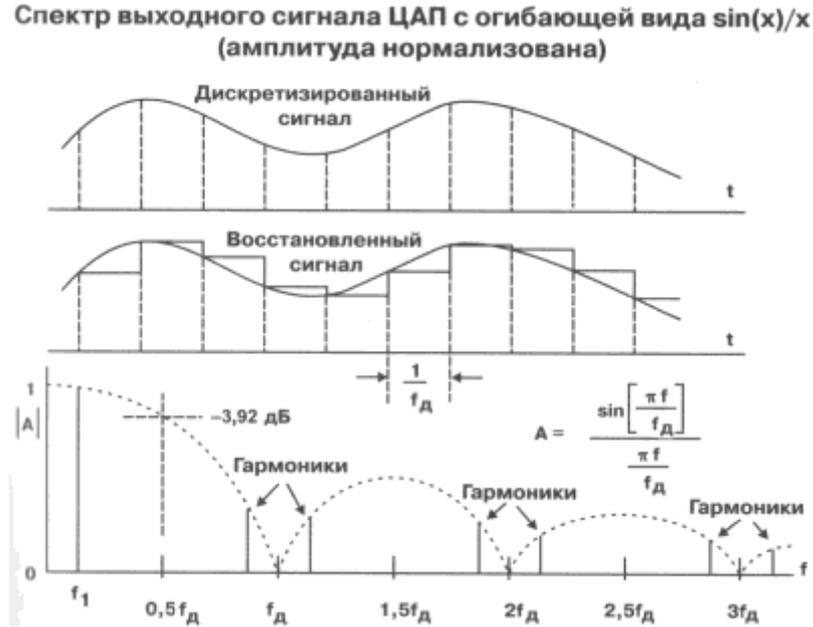


Рис.2.2

Спектр восстановленного сигнала есть произведение спектра дискретизованной косинусоиды и частотной характеристики ЦАП

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_d) H(f). \quad (2.2)$$

Так как  $X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)]$ , то

$$X_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_d) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ \delta[f - (f_1 - n f_d)] + \delta[f + (f_1 + n f_d)] \} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.1) и (2.3) в (2.2), получаем

$$Y(f) = \exp(-j\pi f / f_d) \Delta t \frac{\sin \pi f / f_d}{\pi f / f_d} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ \delta[f - (f_1 - n f_d)] + \delta[f + (f_1 + n f_d)] \}$$

Вспомним!

$$F(f) \cdot \delta(f - f_1) = F(f_1) \delta(f - f_1),$$

С учетом этого обратное преобразование Фурье дает

$$y(t) = \sum_n \frac{\sin 2\pi(f_1 + n f_d) \frac{\Delta t}{2}}{2\pi(f_1 + n f_d) \frac{\Delta t}{2}} \cos \left[ 2\pi(f_1 + n f_d) \left( t - \frac{\Delta t}{2} \right) \right].$$

Выходной сигнал есть суперпозиция гармонических компонент со своими частотами, амплитудами и фазами.

*P.S.*

$$\frac{\sin 2\pi(f_1 + nf_d)\frac{\Delta t}{2}}{2\pi(f_1 + nf_d)\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\sin \pi(f_1\Delta t + n)}{\pi(f_1\Delta t + n)};$$

$$\frac{\sin 2\pi(f_1 - nf_d)\frac{\Delta t}{2}}{2\pi(f_1 - nf_d)\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\sin \pi(f_1\Delta t - n)}{\pi(f_1\Delta t - n)}.$$