Лекция 1 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

4 февраля 2025 г.

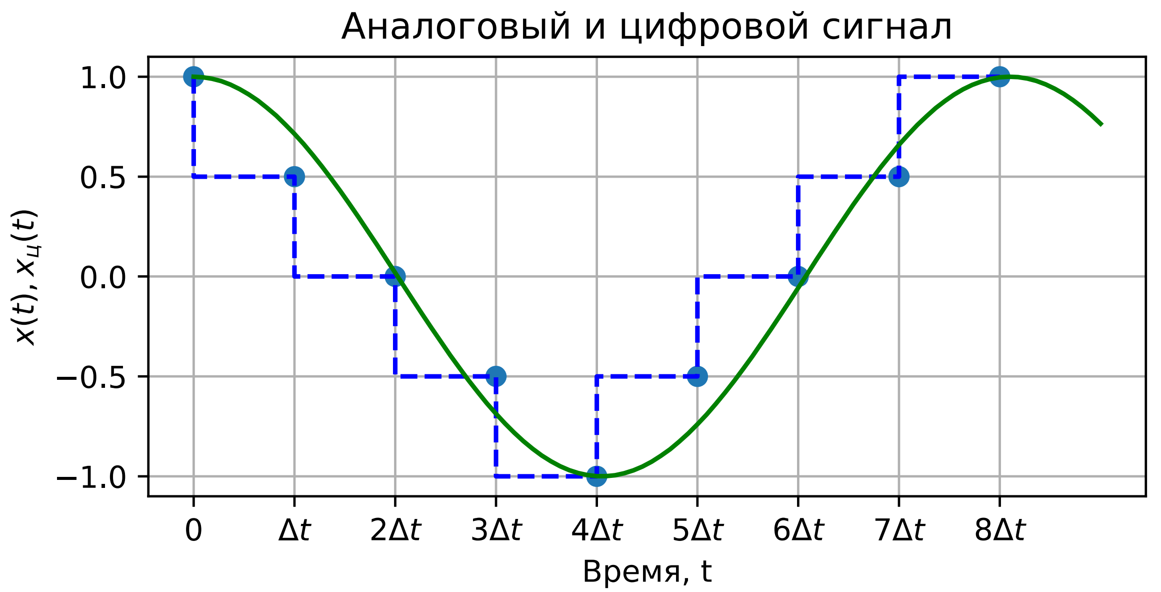
Предисловие к лекционному курсу.

1. Классификация сигналов: аналоговые, дискретные и цифровые сигналы.

Понятия дискретизации и квантования.

Способы описания дискретных сигналов.

Шум квантования АЦП.



Предисловие к лекционному курсу

Лекционный курс
«Дискретные преобразования сигналов»
3 курс (бакалавриат, специалитет)
Б01-201, Б01-202, Б01-203, Б01-204, Б01-205,
Б01-206, Б01-207, Б01-208, Б01-209, С01-219

Лекторы: Леус Андрей Владимирович,
Тормагов Тимофей Алексеевич,
tormagov@phystech.edu

Лекции по вторникам в 10:45—12:10 в Б.Физ ЛК.

Материалы лекций и новости курса публикуются в LMS и на сайте кафедры.

Гостевая авторизация student student5xx
http://kprf.mipt.ru/index.php/uchebnye-kursy2/diskretnye-preobrazovaniya-signalov/88-dsp-3-2025

Страница курса в LMS
https://lms.mipt.ru/course/view.php?id=1564&type=lecture

Тематика курса: дискретизация сигналов, дискретное во времени и дискретное преобразования Фурье и их применение для анализа сигналов, основы цифрового спектрального анализа детерминированных сигналов.

Обратите внимание, что «Радиофизическая лаборатория» и «Дискретные преобразования сигналов» — две разные дисциплины, по которым выставляются отдельные оценки.

Предисловие к лекционному курсу

№	Дата	Тема
1	4 февраля 2025 г.	**1. Классификация сигналов.** Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. Понятия дискретизации и квантования. Шум квантования АЦП.
2	11 февраля	**2. Спектры периодических и импульсных сигналов.** Преобразование Фурье, его свойства. Примеры спектров импульсных сигналов (прямоугольный импульс, треугольный импульс, приподнятый косинус, гаусовский импульс). Спектр дельта-функции. Спектр последовательности из *N* прямоугольных импульсов. Частотные характеристики сигнала. Двойственность (дуальность) преобразования Фурье.
3	18 февраля	Спектры гармонических сигналов. Растекание спектральных компонент при ограничении сигнала по длительности. Спектр периодического сигнала (в общем виде).
4	25 февраля	**3. Дискретизация аналоговых сигналов.** Спектр дискретизованного сигнала. Эффект наложения. Теорема Котельникова во временной области. Выбор частоты дискретизации. Субдискретизация.
5	4 марта	**4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).** Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов. Формы записи ДВПФ для разных частотных переменных. Сходимость ДВПФ. Примеры.
6	11 марта	Свойства ДВПФ: линейность, теорема запаздывания, теорема смещения, равенство Парсеваля, теоремы о свертке, ДВПФ периодических последовательностей.
7	18 марта	**5. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)**: формы записи, свойства, области применения (периодические сигналы и сигналы конечной длительности). Матричная форма ДПФ.
8	25 марта	**6. Связь между ДПФ и ДВПФ** Связь ДПФ и ДВПФ для периодических последовательностей, пример для отсчетов гармонического сигнала. Связь ДПФ и ДВПФ для последовательностей конечной длительности, интерполяция ДВПФ путем добавления нулевых отсчетов в сигнал. Интерполяционная формула восстановления ДВПФ по коэффициентам ДПФ. Частотная ось ДПФ, связь с частотами в спектрах аналогового и дискретного сигналов.
9	1 апреля	**Контрольная работа №1 (по лекциям 1-8).**
10	8 апреля	**7. Окна в цифровом спектральном анализе методом ДПФ.** Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ. Эффекты растекания спектральных компонент («leakage») и утечки спектра через боковые лепестки окна. Примеры основных оконных функции (прямоугольное, треугольное, Ханна, Хемминга, Блэкмана) и их характеристики. Условия различения соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды.
11	15 апреля	Оценка амплитуд компонент: усиление преобразования, паразитная амплитудная модуляция спектра, коэффициент амплитудной модуляции, окно с плоской вершиной. Примеры параметрических окон: окно Чебышева, окно Кайзера.
12	22 апреля	**8. Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT).** Формула анализа. Разрешения по времени и по частоте. Обратимость.
13	29 апреля	**9. Быстрое преобразование Фурье.** Алгоритм БПФ для составной размерности N. Алгоритмы БПФ с основанием 2. Разбиение N-точечного ДПФ на два N/2-точечных. Алгоритм БПФ с основанием 4. Эффективное вычисление свертки с использованием БПФ.
14	6 мая	**10. Представление сигналов ортогональными рядами.** Общий метод дискретизации. Полные ортонормированные системы. Обобщённые ряды Фурье. Примеры базисных функций: функции отсчётов, комплексные экспоненциальные и дискретные экспоненциальные функции, функции Уолша, функции Хаара.
15	13 мая	**Контрольная работа №2 (по лекциям 10-14).**
16	20 мая	**Дифференцированный зачет.**

Предисловие к лекционному курсу

Основная литература

1. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. Часть 1. М.: МФТИ, 2007.
2. Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Уч. пособие. М.: МФТИ, 2007.
3. Дискретизация аналоговых сигналов: методические указания к лабораторной работе по курсу «Радиофизическая лаборатория» / сост. Т. А. Тормагов, Д. А. Питеримов, А. В. Леус, Ю. А. Романюк. – Москва : МФТИ, 2024. – 44 с. Эл. версия на books.mipt.ru

Дополнительная литература

4. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале MATLAB: учеб. пособие.
— СПб.: БХВ-Петербург, 2021. — 560 с.: ил.
5. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2013 г.
6. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер; пер. с англ. под ред. С. Ф. Боева — 3-е изд., испр. — М.: Техносфера, 2019 .— 1048 с.

Печатные учебные пособия ([1,2, 4,5]) есть в библиотеке МФТИ

Примеры в ipynb.

Большая часть лекций содержит дополнительные примеры на Python (файлы вида ex_lec1.ipynb).

Их можно открыть в программе Jupyter Notebook, содержащейся в дистрибутиве Python Anaconda. https://docs.anaconda.com/anaconda/install/

Интерактивные графики доступны в следующих бэкендах библиотеки matplotlib.

- Для новых версий Anaconda %matplotlib widget (pip install --upgrade jupyterlab ipympl).
- Для старых версий %matplotlib notebook .

Предисловие к лекционному курсу

Задачи с лекций

- Типовые задачи для контрольных работ и дифференцированного зачета.
- Решения оцениваются с помощью тестов для самопроверки по задачам с лекции в LMS

Контрольные работы

- Форма текущего контроля по курсу.
- Варианты индивидуальные (120). Каждый вариант содержит три задачи.
- Для успешного результата на контрольной работе рекомендуется решать задачи с лекций и разбирать материалы прочитанных лекций.
- Во время контрольной работы студенты могут пользоваться конспектами лекций и справочной литературой, в том числе в электронном виде. Не запрещается (и даже поощряется) использование средств компьютерного моделирования, например, в целях проверки своих решений.
- Пропущенные по уважительной причине контрольные работы (подтверждается справкой или допуском из деканата) можно написать в другое согласованное время.

Дифференцированный зачет состоит из письменной и устной части. Письменная часть содержит теоретический вопрос и задачи, устная – опрос по программе курса.

На зачете можно зачесть оценку по результатам работы в семестре, которая вычисляется по правилу

$$S = \begin{cases} \dfrac{KP_1 + KP_2 + LMS + Lecture}{2,4}, & \text{если обе } KP_i \geq 1. \\ 2, \text{ иначе,} & \end{cases}$$

где

- KP_1 и KP_2 — оценки за контрольные работы,
- LMS — баллы за решения задач с лекций в LMS (меньше 65% - 0 баллов, 65%-84% - 1 балл, от 85 % – 2 балла),
- $Lecture$ — балл за задачи на лекциях (вещественное число от 0 до 2).

Оценка округляется до ближайшего целого.

Предварительная оценка не учитывается, если сдается полноценный зачет.

Предисловие к лекционному курсу

Примеры расчета оценки.

а)

$$KP_1 = 4,\ KP_2 = 6,\ LMS = 0,\ Lecture = 0,$$

$$S = \left[\frac{10}{2,4}\right] = 4.$$

б)

$$KP_1 = 4,\ KP_2 = 6,\ LMS = 2,\ Lecture = 2,$$

$$S = \left[\frac{14}{2,4}\right] = 6.$$

в)

$$KP_1 = 1,\ KP_2 = 9,\ LMS = 0,\ Lecture = 0,$$

$$S = \left[\frac{11}{2,4}\right] = 4.$$

г)

$$KP_1 = 0,\ KP_2 = 9,\ LMS = 0,\ Lecture = 0,$$

$$S = 2.$$

д)

$$KP_1 = 9,\ KP_2 = 8,\ LMS = 0,\ Lecture = 0,$$

$$S = \left[\frac{17}{2,4}\right] = 7.$$

е)

$$KP_1 = 10,\ KP_2 = 9,\ LMS = 2,\ Lecture = 1,8,$$

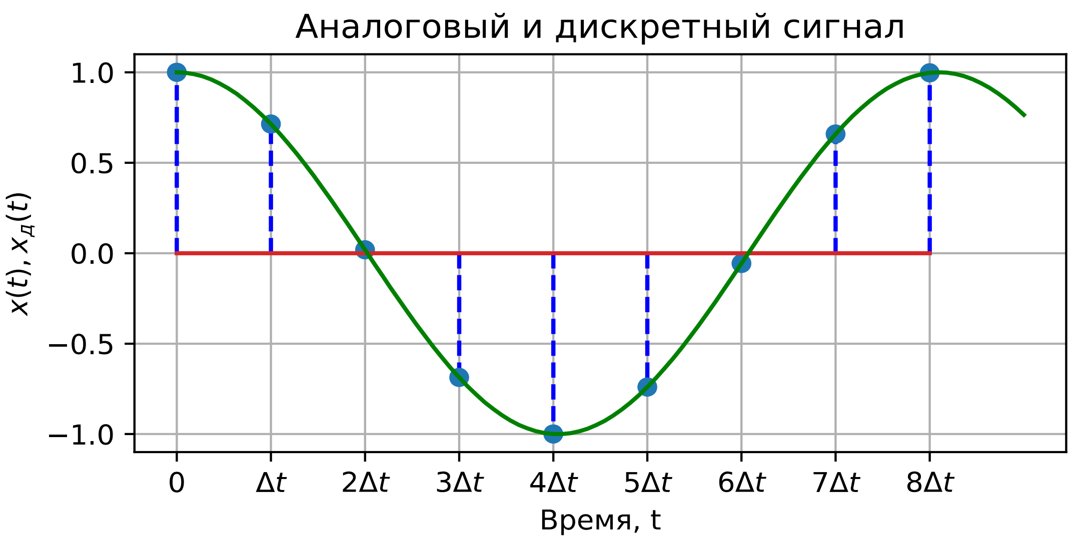
$$S = \left[\frac{22,8}{2,4}\right] = 10.$$

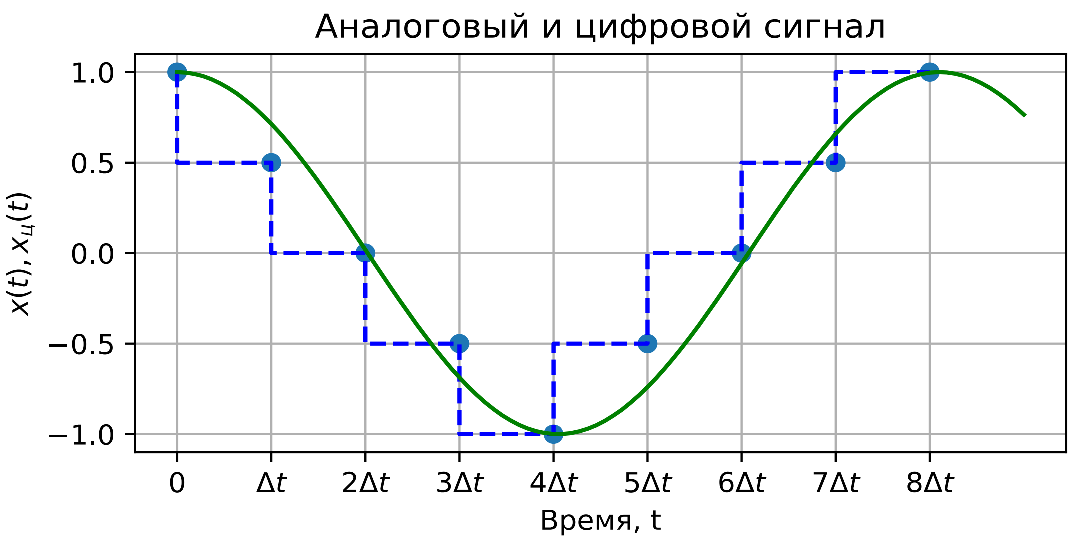
ж)

$$KP_1 = 10,\ KP_2 = 10,\ LMS = 2,\ Lecture = 0,$$

$$S = \left[\frac{22}{2,4}\right] = 9.$$

Классификация сигналов: аналоговые, дискретные, цифровые.





Классификация сигналов: аналоговые, дискретные и цифровые сигналы.

Аналоговые или континуальные сигналы $x(t)$ описываются непрерывными и кусочно-непрерывными функциями, причем как сама функция, так и ее аргумент могут принимать любые значения в пределах некоторого интервала.

Дискретные сигналы, могут быть описаны в виде счетного набора отсчетов (значений) в заданные моменты времени $k\Delta t$, $k \in Z$, где Δt — шаг дискретизаци. Частота дискретизации $f_д$ (размерность в Гц) — это величина, обратная шагу дискретизации $f_д = 1/\Delta t$.

Цифровые сигналы, помимо того, что они являются дискретными, могут принимать лишь конечное число значений, соответствующих уровням квантования. Процесс преобразования аналогового сигнала в цифровой состоит из операций *дискретизации и квантования,* которые осуществляются *аналого-цифровым преобразователем (АЦП)*. Обычно число уровней квантования 2^m, где m — разрядность АЦП.

Напоминание про дельта-функцию

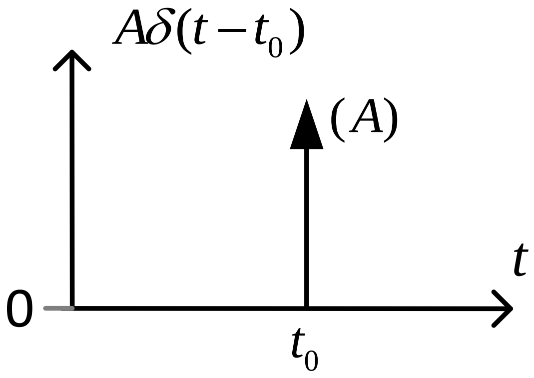
Напоминание про дельта-функцию

Для дельта-функции справедливо соотношение

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)\,dt = 1 \;\; \forall \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим сигнал $y(t) = A\delta(t-t_0), A \in \mathbb{C}$. Это дельта-функция в точке t_0 оси времени. Площадь под графиком

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} A\delta(t-t_0)\,dt = A \;\; \forall \varepsilon > 0.$$



Предположим, что дельта-функция интегрируема по интервалу $(-\infty, t)$. Тогда

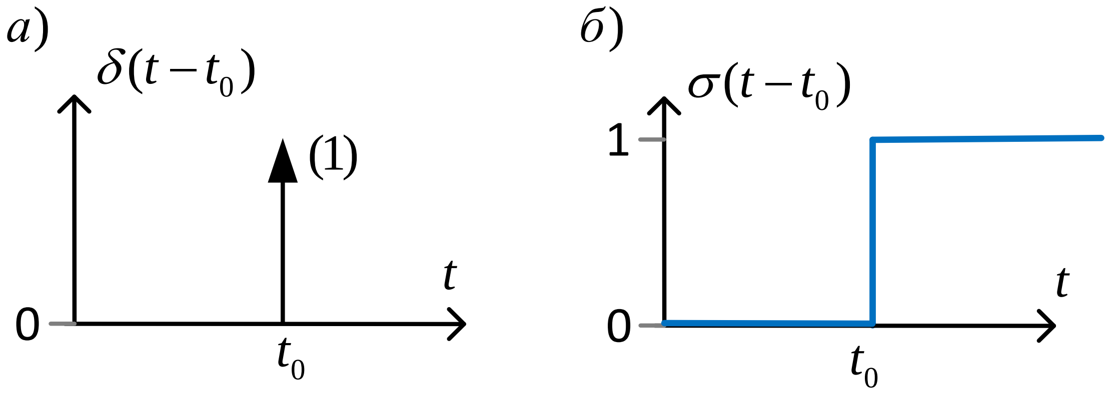
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-t_0)\,d\tau = \sigma(t-t_0),$$

где $\sigma(t-t_0)$ – *функция единичного скачка* или *функция Хевисайда*:

$$\sigma(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < t_0, \\ 1/2 & \text{при} \quad t = t_0, \\ 1 & \text{при} \quad t > t_0. \end{cases}$$

Функция единичного скачка является интегралом от дельта-функции, а значит

$$\sigma'(t-t_0) = \delta(t-t_0).$$



а – дельта-функция, *б* – функция единичного скачка

Напоминание про дельта-функцию

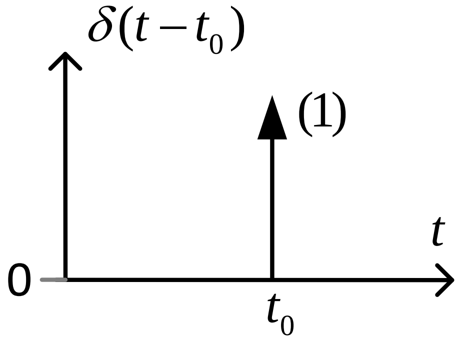
Фильтрующее свойство дельта-функции: её свёртка с любой ограниченной и непрерывной в точке t_0 функцией $x(t)$ равна

$$\int_a^b x(t)\delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} x(t_0), & a < t_0 < b, \\ (1/2)x(t_0), & t_0 = a \ \text{ или } \ t_0 = b, \\ 0, & t_0 < a, \quad t_0 > b. \end{cases}$$

Если функция $x(t)$ в точке $t = t_0$ имеет разрыв первого рода, то

$$\int_a^b x(t)\delta(t-t_0)\,dt = (1/2)[x(t_{0+}) + x(t_{0-})], \quad a < t_0 < b,$$

где $x(t_{0+})$ и $x(t_{0-})$ – значения $x(t)$ справа и слева от точки разрыва.



Если a – действительная величина, то выполняются следующие равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-a)\,dt = x(a),$$

$$x(t)\cdot\delta(t-a) = x(a)\cdot\delta(t-a),$$

$$\delta[(t-t_0)/a] = |a|\,\delta(t-t_0),$$

$$\delta(at-t_0) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t-\frac{t_0}{a}\right).$$

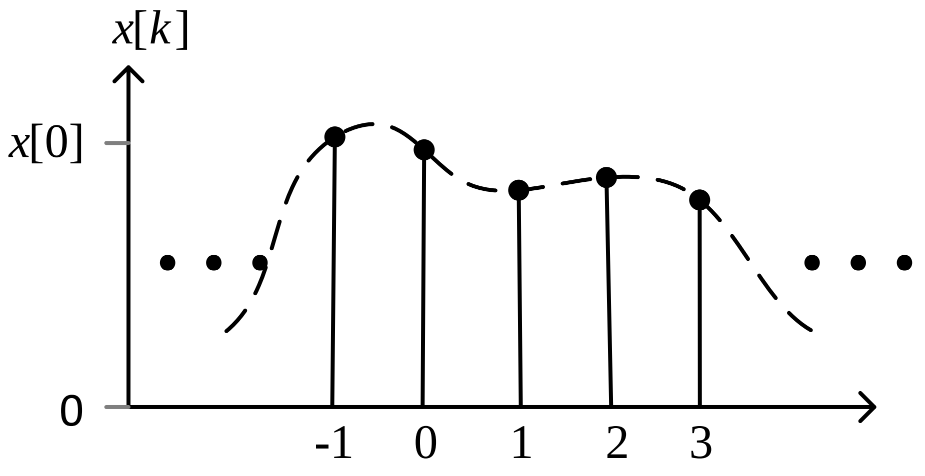
Способы описания дискретных сигналов

Способы описания дискретных сигналов

1) *Функция дискретного времени* k.

Это описание дискретного сигнала в виде последовательности отсчетов $x[k]$ в заданные моменты времени $k\Delta t, k \in \mathbb{Z}$, где Δt — шаг дискретизации.

Далее мы будем использовать квадратные скобки для обозначения функций дискретного аргумента.

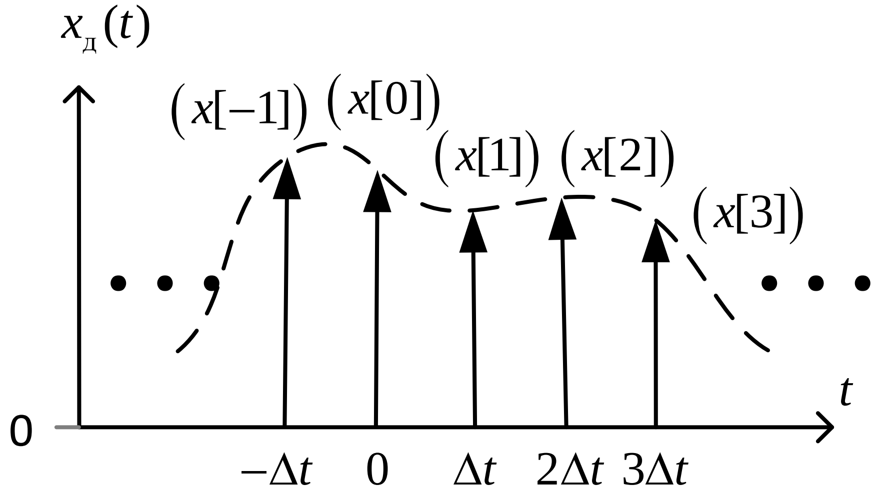


k	-1	0	1	2	3
$x[k]$	x[-1]	x[0]	x[1]	x[2]	x[3]

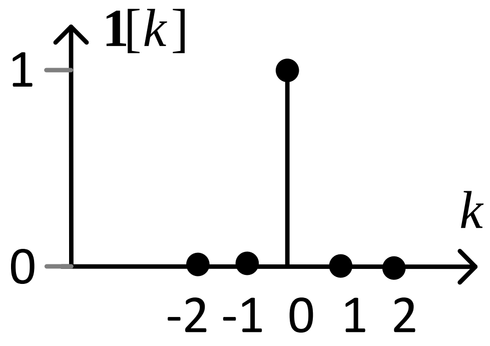
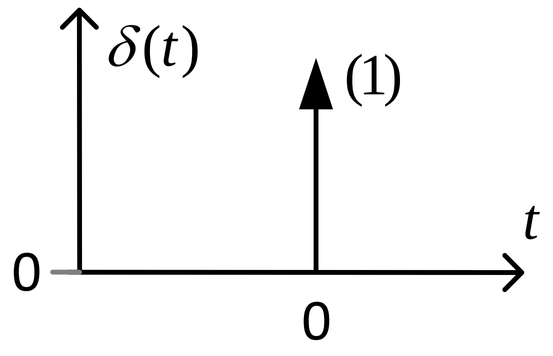
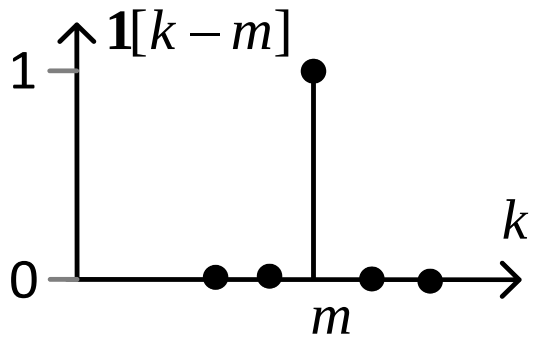
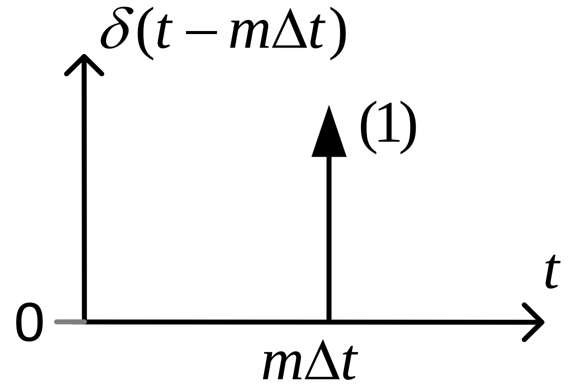
2) *Функция непрерывного времени* t *(континуальная запись).*

$$x_{\text{д}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t)$$

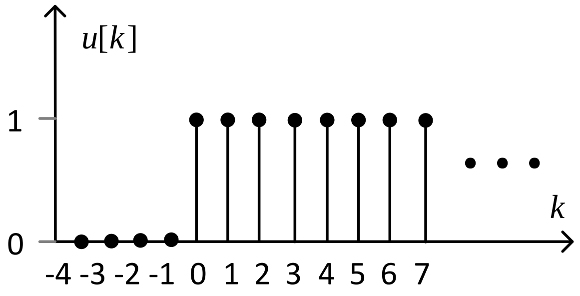
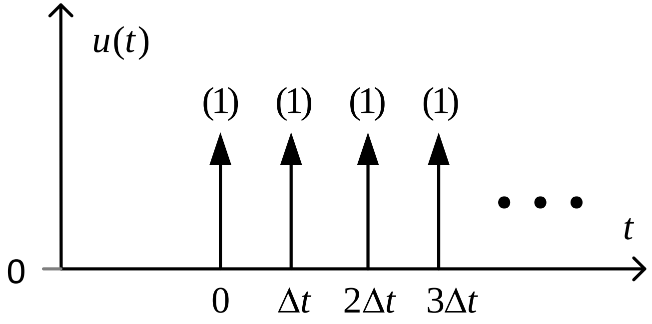
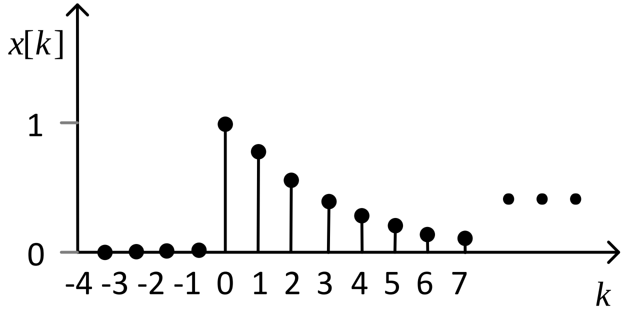
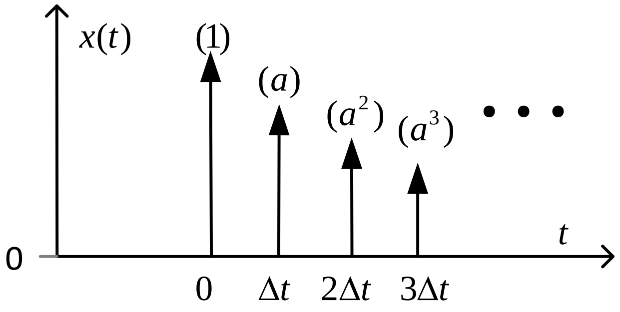
В этой записи дискретный сигнал представляет собой последовательность дельта-функций с площадями $x[k]$.



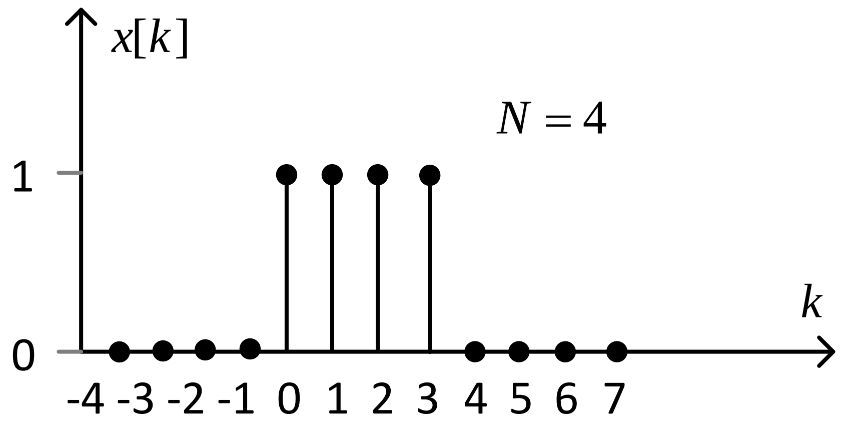
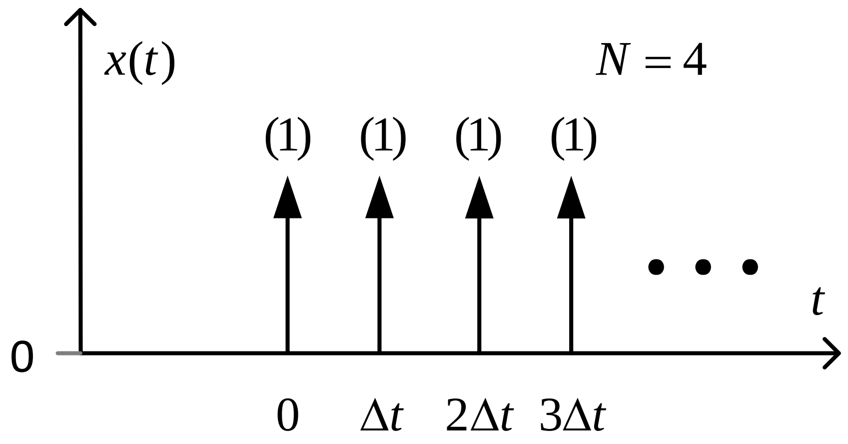
Способы описания дискретных сигналов

Описание в виде функции дискретного времени	**Описание в виде функции непрерывного времени**
Единичный импульс в точке 0	
$\mathbf{1}[k]=\begin{cases}1, & \text{при } k=0,\\ 0, & \text{при } k\neq 0.\end{cases}$ (единичный импульс) 	$\delta(t)$ (дельта-функция Дирака) 
Единичный импульс в точке m	
$\mathbf{1}[k-m]=\begin{cases}1, & \text{при } k=m,\\ 0, & \text{при } k\neq m.\end{cases}$ 	$\delta(t-m\Delta t)$ 

Способы описания дискретных сигналов

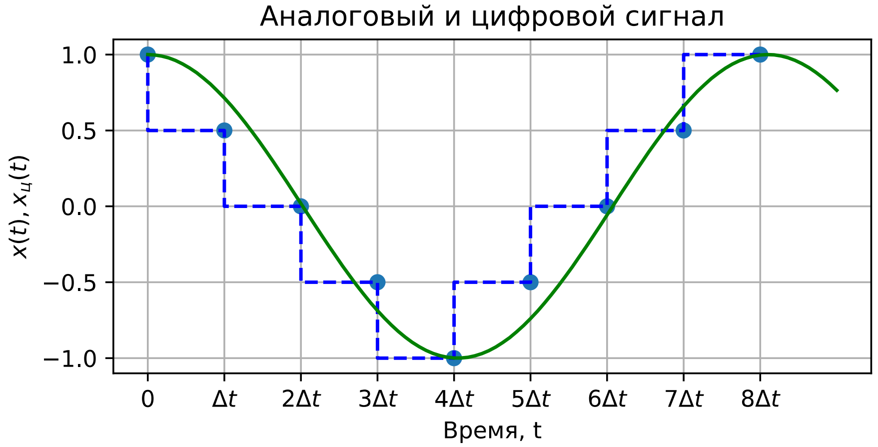
Описание в виде функции дискретного времени	**Описание в виде функции непрерывного времени**
Дискретная функция включения	
$u[k]=\begin{cases}1, \text{ при } k\ge 0,\\ 0, \text{ при } k<0.\end{cases}$ 	$\sum\limits_{m=0}^{\infty}\delta(t-m\Delta t)$ 
Дискретная экспонента	
$x[k]=\begin{cases}a^k, \text{ при } k\ge 0,\\ 0, \text{ при } k<0.\end{cases}$  *случай 0<a<1*	$\sum\limits_{m=0}^{\infty}a^m\delta(t-m\Delta t)$  *случай 0<a<1*

Способы описания дискретных сигналов

<table>
<tr><th>Описание в виде
функции дискретного времени</th><th>Описание в виде
функции непрерывного времени</th></tr>
<tr><td colspan="2">Последовательность из N единичных импульсов</td></tr>
<tr><td>$$x[k]=\sum_{m=0}^{N-1}\mathbf{1}[k-m]$$

</td><td>$$x(t)=\sum_{m=0}^{N-1}\delta(t-m\Delta t)$$

</td></tr>
</table>

Шум квантования АЦП

Шум квантования АЦП



Шумы квантования неизбежно проявляются, поскольку, как правило, разрядность чисел для представления отсчетов, ограничена.

Процесс преобразования аналогового сигнала в цифровой состоит из дискретизации и квантования, которые осуществляются аналого-цифровым преобразователем (АЦП).

В результате дискретизации взятием отсчетов мы получаем выборки аналогового сигнала $x_a(t)$:

$$x[k] = x_a(k\Delta t),$$

где Δt – шаг дискретизации.

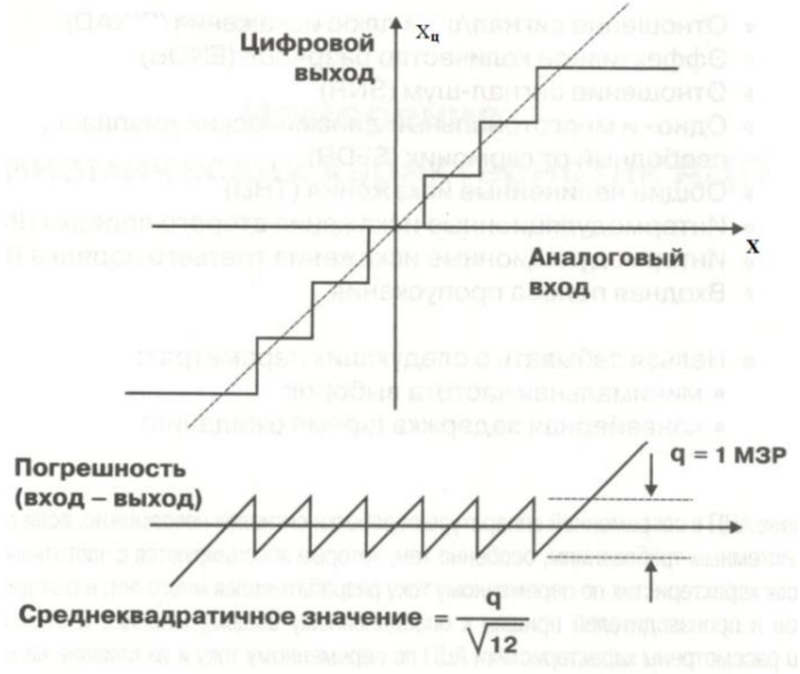
После квантования по уровню, мы получаем цифровой сигнал:

$$x_ц[k] = x[k] - e[k],$$

где $e[k] = x[k] - x_ц[k]$ – это погрешность квантования – некоторая реализацию шума квантования.

Обычно число уровней квантования 2^n, где n – разрядность АЦП. АЦП осциллографа PV6501 8 битное (восьмиразрядное). Каждый отсчет в буфере описывается одним из $2^8 = 256$ состояний.

Шум квантования АЦП



Определим шум квантования стандартного n-разрядного АЦП. Погрешность квантования $e[k]=x[k]-x_{\text{ц}}[k]$.

Максимальная по модулю погрешность квантования составляет половину единицы младшего значащего разряда (шага квантования) q:

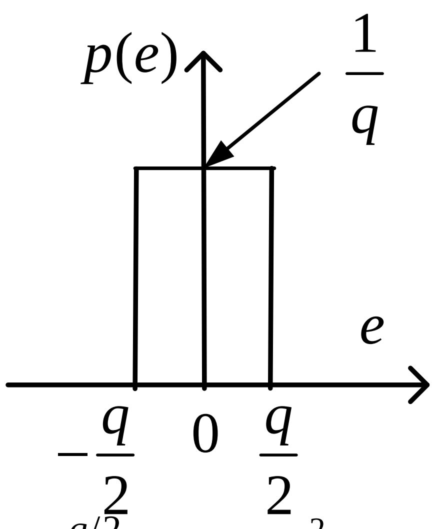
$$-\frac{q}{2}\le e[k]\le\frac{q}{2}$$

Заметим, что для каждого момента времени все возможные значения погрешности равновероятны.

Шум квантования не коррелирован с входным сигналом и имеет равномерное распределение на отрезке.

Для плотности вероятности $p(e)$ должно быть выполнено:

$$\int_{-q/2}^{q/2} p(e)de=1.$$



Ошибка квантования имеет нулевое среднее и дисперсию

$$M[e]=\int_{-q/2}^{q/2} ep(e)de=0,$$

$$\sigma_e^2=M[e^2]-\left(M[e]\right)^2=\int_{-q/2}^{q/2} e^2p(e)de=\frac{1}{q}\int_{-q/2}^{q/2} e^2de=\frac{q^2}{12}.$$

Среднеквадратичное значение шума квантования

$$\sigma_e=\frac{q}{\sqrt{12}}=\frac{q}{2\sqrt{3}}.$$

Шум квантования АЦП

Заметим, что пилообразная погрешность создаёт гармоники, лежащие дальше полосы $[0, f_{\text{д}}/2]$. Однако все высшие гармоники должны переноситься (эффект наложения) в эту полосу и, затем суммируясь, образовать шум с действующим значением $\sigma_e = q/\sqrt{12}$.

Пусть на входе АЦП с диапазоном напряжения входного сигнала $\left[-\dfrac{q\cdot 2^n}{2}, \dfrac{q\cdot 2^n}{2}\right]$ действует полномасштабная синусоида

$$x(t) = \frac{q\cdot 2^n}{2}\sin 2\pi f t.$$

Среднеквадратичное значение входного сигнала $\sigma_x = \dfrac{q\cdot 2^n}{2\sqrt{2}}$.

Отношение «сигнал/шум» (SNR — Signal to Noise Ratio)

$$SNR = 20\lg\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_e}\right) = 20\lg\left(\frac{q\cdot 2^n/2\sqrt{2}}{q/2\sqrt{3}}\right) = 20\lg 2^n - 20\lg\sqrt{2/3}$$

$$SNR = 6{,}02n + 1{,}76 \quad (\text{дБ})$$

Относительный уровень шума квантования

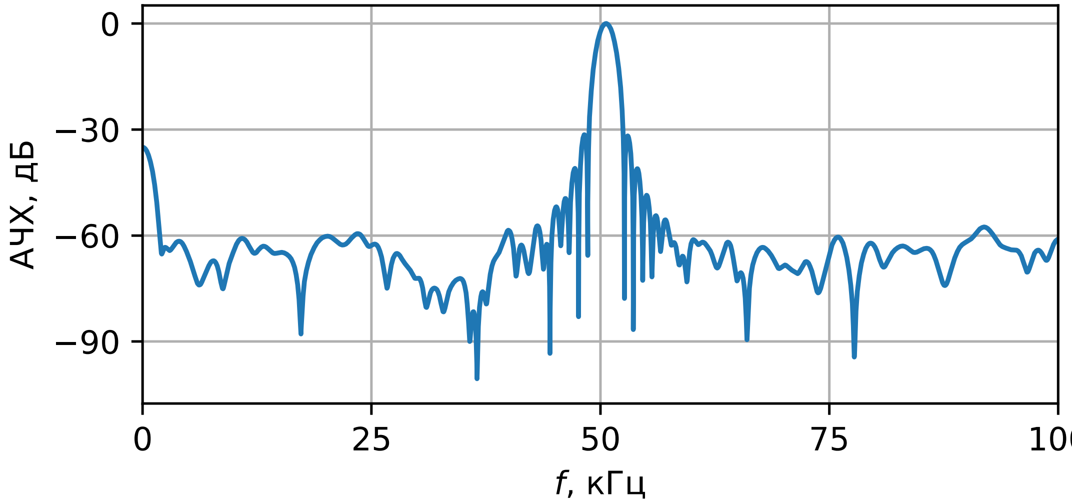
$$\gamma = 20\lg\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_x}\right) = 20\lg\left(\frac{q/2\sqrt{3}}{q\cdot 2^n/2\sqrt{2}}\right) = 20\lg\frac{1}{2^n\sqrt{1{,}5}}$$

$$\gamma = -6{,}02n - 1{,}76 \quad (\text{дБ})$$

Пример. На рисунке приведена оценка спектра сигнала, состоящего из отрезка синусоиды, полученная цифровым осциллографом PV6501 с $n=8$ битным АЦП с использованием окна Ханна. Относительный уровень шума квантования в дБ будет

$$\gamma = -(6{,}02n + 1{,}76)\,\text{дБ} \approx -50\,\text{дБ}.$$

Проводить измерения сигналов и их спектров ниже этого уровня бессмысленно.



Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

№1. Имеется одноканальная (моно) аудиозапись с битовой глубиной 16 бит на отсчёт (разрядность АЦП равна 16), представленная в виде .wav файла. Частота дискретизации 44100 Гц. Определите число уровней квантования АЦП и шаг дискретизации Δt. Оцените длительность сигнала, если объем файла составляет 280 КБ и никакое дополнительное сжатие не производится.

№2. Приведите континуальную запись (в виде последовательности дельта-функций) для следующих сигналов:

а) единичного импульса, задержанного на семь тактов дискретизации $x[k] = \mathbf{1}[k-7]$,

б) дискретизованной синусоиды с относительной частотой $\nu_0 = \frac{1}{4}$

$$y[k] = \sin\left(2\pi \frac{1}{4} k\right),$$

в) последовательности из пяти единичных импульсов

$$x[k] = \sum_{m=0}^{4} \mathbf{1}[k-m],$$

г) дискретной экспоненты вида

$$x[k] = \begin{cases} (-0,5)^k, \text{ при } k \geq 0, \\ 0, \text{ при } k < 0. \end{cases}$$

№3. Определить отношение «сигнал/шум» (SNR) и относительный уровень шумов квантования для

а) 8-разрядного АЦП, б) 10-разрядного АЦП,

в) 16-разрядного АЦП.