

2.1. Фильтры нижних частот (ФНЧ) для защиты от наложения спектров

На рис. 2.1.1 в качестве примера изображено устройство цифровой обработки видеосигнала системы ЦОС реального времени. Спектр сигнала расположен симметрично возле нуля частот.

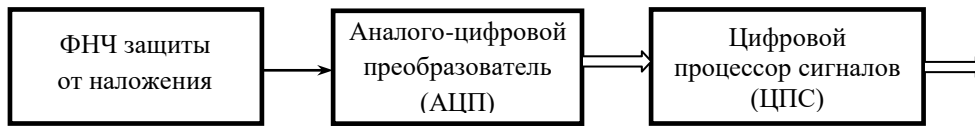


Рис. 2.1.1. Устройство цифровой обработки видеосигнала системы ЦОС реального времени

Аналоговая часть включает в себя фильтр ФНЧ для формирования полосы частот обрабатываемых сигналов и соблюдения условий *теоремы Котельникова*, а также аналого-цифровой преобразователь (АЦП).

Входной фильтр (ФНЧ) защиты от *наложения спектров* должен ограничивать полосу частот спектра входного сигнала таким образом, чтобы подавить частотные компоненты, превышающие частоту Найквиста (половину частоты дискретизации $f_d/2$).

АЦП формирует цифровые отсчёты сигналов, т.е. выполняет дискретизацию сигналов по времени и квантование отсчётов по уровню. Благодаря ограничению полосы частот, возникающее после АЦП повторение спектра происходит без заметного наложения. Однако «*эффект наложения*» принципиально неустраним, его можно только ослабить соответствующим выбором аналогового фильтра. Для дальнейшего важно отметить, что «*эффект наложения*» понижает динамический диапазон. Несмотря на то, что основная обработка производится в ЦПС, аналоговый блок является весьма ответственным узлом, определяющим многие важные характеристики устройства в целом, такие, как *чувствительность, динамический диапазон, максимальная полоса частот* обрабатываемых сигналов. Более того, на сегодняшнем уровне развития элементной базы именно эта часть аппаратуры ограничивает предельно достижимые характеристики УОС. Качество аналого-цифрового преобразования оказывает значительное влияние на алгоритмы, используемые при дальнейшей цифровой обработке. Поэтому аналоговый блок и ЦПС целесообразно проектировать совместно, оптимизируя характеристики всего устройства обработки сигналов (УОС).

На практике, поскольку идеального фильтра не существует, ФНЧ обычно подавляет частотные компоненты, превышающие частоту Найквиста, до уровня, меньшего чем среднеквадратический уровень шума квантования АЦП (см. далее), так что эти компоненты становятся неразличимы для АЦП.

Фильтры Баттерворта и Чебышева([1])

Рассмотрим некоторые физически реализуемые фильтры нижних частот. Основное назначение таких фильтров с наименьшими потерями передавать на выход колебания с частотами $f \leq f_c$, где f_c – так называемая частота среза фильтра. В тоже время компоненты с более высокими частотами должны существенно подавляться. Обычно частота среза согласовывается с частотой дискретизации (см. далее).

Удобно рассматривать квадрат модуля частотной характеристики фильтра – так называемый *коэффициент передачи мощности*.

$$|H(f)|^2 = H(f) \cdot H^*(f).$$

Эта характеристика всегда вещественна и потому удобна для задания исходных данных к синтезу фильтров.

Фильтр Баттерворта. Для этого фильтра выбирается рациональная аппроксимирующая функция

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_c)^{2n}}, \quad (2.1.1)$$

где n – целое число, определяющее порядок фильтра. Эта функция изображена на рис. 2.1.2

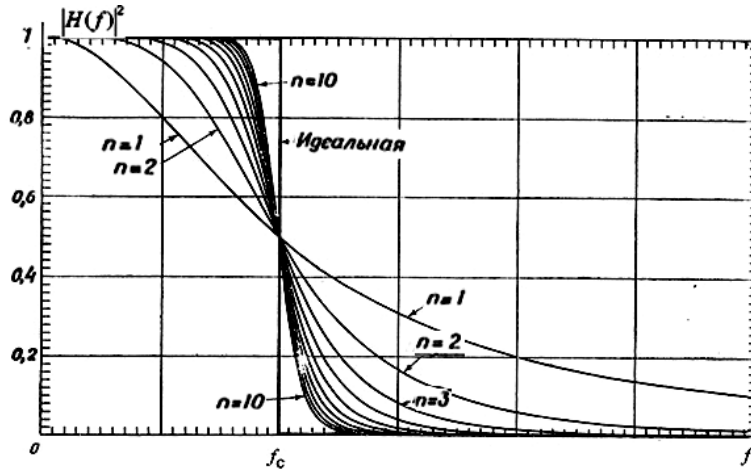


Рис. 2.1.2

Параметры фильтра f_c и n рассчитываются следующим образом. Сначала запишем два условия для границ переходной полосы (рис. 2.1.3).

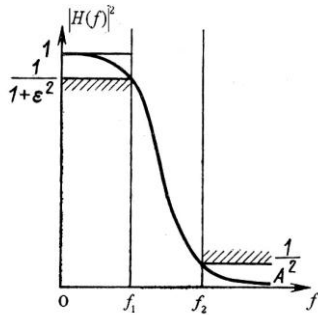


Рис. 2.1.3

$$\frac{1}{1+a^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{f_1}{f_c}\right)^{2n}};$$

$$\frac{1}{A^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{f_2}{f_c}\right)^{2n}}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{f_1}{f_c}\right)^{2n} = a^2; \quad \left(\frac{f_2}{f_c}\right)^{2n} = A^2 - 1. \quad (2.1.2)$$

Поделим первое равенство (2.1.2) на второе, тогда

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{2n} = \frac{a^2}{A^2 - 1}.$$

Решая относительно n , получим

$$n = \frac{\lg \frac{a}{\sqrt{A^2 - 1}}}{\lg \left(\frac{f_1}{f_2}\right)}. \quad (2.1.3)$$

Из первого равенства (2.1.2) находим частоту среза

$$f_c = \frac{f_1}{\sqrt[n]{a}}. \quad (2.1.4)$$

Таким образом, все параметры функции $|H(f)|^2$ определены по заданным ослаблениям

$$\frac{1}{1+a^2} \text{ и } \frac{1}{A^2}$$

на границах переходной полосы $[f_1, f_2]$.

Основные свойства фильтра Баттерворта:

- на частоте среза $f = f_c$ ослабление, вносимое фильтром, составляет $10 \lg 0,5 = -3 \text{ дБ}$ и не зависит от порядка фильтра n ;
- функция $|H(f)|^2$ монотонно убывает с ростом f и имеет максимальное значение, равное единице, при $f = 0$;
- первые $(2n-1)$ производных функции $|H(f)|^2$ равны нулю при $f = 0$; по этой причине фильтры Баттерворта называют *фильтрами с максимально плоскими частотными характеристиками*;
- чем больше n , тем точнее аппроксимируется идеальная форма частотной характеристики ФНЧ (рис. 2.1.2);
- для нормированной частоты $v = \frac{f}{f_c} \gg 1$ имеем

$$|H(f)|^2 \approx v^{-2n}$$

и ослабление, выраженное в децибелах, $10 \lg(v^{-2n}) = -20n \lg v$ дБ. Отсюда видно, что при увеличении частоты вдвое ослабление в фильтре Баттерворта возрастает на $-20n \cdot 0,3 = -6n$ дБ; поэтому можно сказать, что порядок фильтра n связан с крутизной характеристики отношением

$$\frac{\text{число дБ}}{\text{октава}} = 6n.$$

При $n = 10$ фильтр обеспечивает после f_c затухание -60 дБ/октава.

Фильтр Чебышева. Практическое применение находит другой способ аппроксимации частотной характеристики идеального фильтра нижних частот, известный под названием *чебышевской аппроксимации*. Коэффициент

передачи мощности чебышевского ФНЧ для нормированной частоты $v = \frac{f}{f_c}$ даётся выражением

$$|H(v)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(v)}. \quad (2.1.5)$$

Здесь $\varepsilon \leq 1$ – коэффициент, задающий неравномерность в полосе пропускания, а $T_n(v)$ – полином Чебышева n -го порядка, определяемый соотношениями

$$T_n(v) = \begin{cases} \cos(n \arccos v), & |v| \leq 1, \\ \cosh(n \operatorname{arccosh} v), & |v| > 1. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Для полиномов Чебышева имеет место рекуррентное соотношение

$$T_n(v) = 2vT_{n-1}(v) - T_{n-2}(v), \quad n \geq 2, \quad (2.1.7)$$

причём $T_0(v) \equiv 1$ и $T_1(v) = v$.

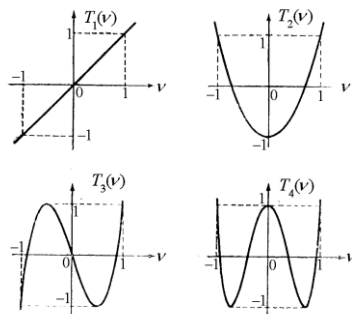


Рис. 2.1.4

На рис. 2.1.4 демонстрируется колебательный характер полиномов Чебышева в интервале $-1 \leq v \leq 1$. При $v > 1$ имеет быстрый рост $T_n(v)$. Асимптотически для $v \gg 1$ имеем $T_n(v) \approx 2^{n-1} v^n$.

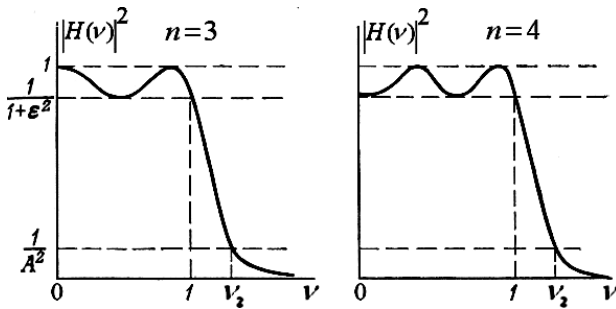


Рис. 2.1.5

Характерной особенностью этих полиномов является то, что среди всех полиномов степени n с одинаковым коэффициентом при старшем члене функция $T_n(v)$ имеет наименьшее отклонение от нуля на интервале $-1 \leq v \leq 1$. На границе полосы пропускания при $v=1$ ($f=f_c$) $T_n(1)=1$ для всех n . Типичный график функции $T_n(v)$ показан на рис. 2.5.13 для двухразличных значений n и при одном значении коэффициента неравномерности ϵ .

С ростом n крутизна спада частотной характеристики ФНЧ с чебышевской аппроксимацией на частотах выше граничной увеличивается значительно.

Пример 2.1.1. Фильтр с чебышевской характеристикой 3-го порядка на частоте среза f_c обеспечивает ослабление мощности в два раза. Определить ослабление, вносимое этим фильтром на частоте $3f_c$.

На частоте среза $v=1$ и $T_n(1)=1$ при любом n . Поэтому из

$$|H(v)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(v)} = 0,5$$

находим $\epsilon=1$. Многочлен Чебышева 3-го порядка с учётом будет иметь вид

$$T_3(v) = 2vT_2(v) - T_1(v) = 2v[2vT_1(v) - T_0(v)] - T_1(v) = 4v^3 - 3v.$$

Ослабление, вносимое фильтром на частоте $v=1$, составит

$$10 \lg[1/(1+99^2)] \approx -40 \text{ дБ.}$$

Аналоговые фильтры Баттерворта и Чебышева реализуются с помощью каскадного соединения RLC -звеньев, отделённых друг от друга развязывающими повторителями.

Замечание. Задача определения степени близости реального ФНЧ к идеальному возникает постоянно. Для этого может быть использован метод наименьших квадратов. Другой критерий близости — *критерий Чебышева*, который в качестве меры расстояния между двумя кривыми использует максимальное расстояние между ними. При приближении по Чебышеву параметры подбираются таким образом, чтобы сделать максимальную ошибку как можно меньше, т. е. *минимизируется максимальная ошибка*. Поэтому этот процесс часто называют *минимаксной стратегией* приближения. Для фильтров Чебышева минимаксный критерий является основным.

2.2. Основные электрические параметры современных АЦП

Основные электрические параметры современных АЦП можно условно разделить на *статические*, характеризующие величины входных и выходных сигналов, разрешающую способность преобразователя, погрешности преобразования постоянного напряжения, температурную нестабильность и другие, а также

динамические, определяющие время и максимальную частоту преобразования, *шумовые* и другие характеристики. Важную роль играют также

конструктивные параметры АЦП — архитектура, количество каналов, тип выходного интерфейса, наличие внутреннего тактового генератора и источника опорного напряжения, варианты исполнения корпуса. В технических описаниях и руководствах по применению интегральных АЦП обычно используются следующие основные электрические параметры в порядке значимости []:

1. Разрядность— измеряется в битах и определяет максимальное число кодовых комбинаций на выходе АЦП, характеризуя его с точки зрения достижимой точности преобразования.

Разрешающей способностью АЦП (Resolution) называется величина, измеряемая в процентах или децибелах, обратная максимальному числу кодовых комбинаций на выходе АЦП

$$R = \frac{1}{2^N}$$

Например, 12-разрядный АЦП имеет разрешающую способность 1/4096 или 0,0245% от полной шкалы, что соответствует $-72,2$ дБ.

Динамическим диапазоном АЦП (DR - Dinamic Range) называется отношение максимального воспринимаемого уровня входного напряжения к минимальному, выраженное в дБ

$$DR = 20\lg(2^N)$$

Этот параметр определяет максимальное количество информации, которое способен передавать АЦП. Так, для 12-разрядного АЦП $DR=72$ дБ.

2. Время преобразования (Conversion Time)— измеряется в микросекундах и определяет интервал времени от начала преобразования до появления на выходе АЦП устойчивого кода выходного сигнала. Для некоторых АЦП это время зависит от величины входного сигнала.

3. Максимальная частота преобразования (Speed) — измеряется в мегагерцах (или MSPS) и определяет наибольшую частоту, с которой возможно преобразование входного сигнала, при условии, что величины погрешностей не выходят из заданных пределов.

4. Число каналов.

5. Диапазон напряжения входного сигнала (V_{in}).

Разрешение по напряжению

Разрешение АЦП — минимальное изменение величины аналогового сигнала, которое может быть преобразовано данным АЦП — связано с его разрядностью. В случае единичного измерения без учёта шумов разрешение напрямую определяется *разрядностью* АЦП.

Разрядность АЦП характеризует количество дискретных значений, которые преобразователь может выдать на выходе. В двоичных АЦП измеряется в **битах**. Например, двоичный 8-разрядный АЦП способен выдать 256 дискретных значений (0...255).

Разрешение по напряжению равно разности напряжений, соответствующих максимальному и минимальному выходному коду, делённой на количество выходных дискретных значений. Например:

- Пример 1
 - Диапазон входных значений = от 0 до 10 вольт
 - Разрядность двоичного АЦП 12 бит: $2^{12} = 4096$ уровней квантования
 - Разрешение двоичного АЦП по напряжению: $(10-0)/4096 = 0,00244$ вольт = 2,44 мВ
- Пример 2
 - Диапазон входных значений = от -10 до $+10$ вольт
 - Разрядность двоичного АЦП 14 бит: $2^{14} = 16384$ уровней квантования
 - Разрешение двоичного АЦП по напряжению: $(10-(-10))/16384 = 20/16384 = 0,00122$ вольт = 1,22 мВ.

На практике разрешение АЦП ограничено **отношением сигнал/шум** входного сигнала. При большой интенсивности шумов на входе АЦП различение соседних уровней входного сигнала становится невозможным, то есть ухудшается разрешение. При этом реально достижимое разрешение описывается **эффективной разрядностью** ([англ. effective number of bits, ENOB](#)), которая меньше, чем реальная разрядность АЦП. При преобразовании сильно зашумлённого сигнала младшие разряды выходного кода практически бесполезны, так как содержат шум. Для достижения заявленной разрядности отношение сигнал/шум входного сигнала должно быть пример-

но 6 дБ на каждый бит разрядности (6 дБ соответствует двукратному изменению уровня сигнала).

6. Максимальное (MaxSupply Voltage) и минимальное (MinSupply Voltage) напряжения питания.

7. Максимальная рассеиваемая мощность (Power Dissipation).

8. Интегральная нелинейность (INL) измеряется в процентах от полной шкалы или единицах младшего разряда — *EMP* (Least Significant Bit — *LSB*) и характеризует отклонение реальной характеристики преобразования от идеальной во всем диапазоне входного сигнала.

9. Дифференциальная нелинейность (DNL) так же, как и *INL*, измеряется в процентах или *EMP* (*LSB*) и характеризует разность напряжений между данным иссредним значением кванта преобразования.

10. Отношение «сигнал/шум» (Signal to Noise Ratio— SNR) измеряется в децибелах и равно отношению среднеквадратического значения входного сигнала к среднеквадратическому значению шума, который определяется как сумма всех остальных спектральных составляющих, включая гармоники, но исключая постоянную составляющую, для входного сигнала (–1 дБ) от полной шкалы. Для идеального АЦП $SNR = (6,02N + 1,76)$ дБ, где N — разрядность АЦП. Например, для идеального 12-разрядного АЦП $SNR = 74$ дБ. Это значение больше значения динамического диапазона такого же реального АЦП т.к. минимальный уровень воспринимаемого сигнала должен быть больше уровня шума. В данной формуле учитывается только шум квантования и не учитываются другие источники шума, существующие в реальных АЦП. Поэтому, значения SNR для реальных АЦП как правило ниже идеального. Типичным значением SNR для реального 12-разрядного АЦП является 68-70 дБ.

Если входной сигнал имеет размах меньше U_{FSR} — напряжения полной шкалы (FSR – Full Scale Range), то в последнюю формулу нужно внести корректировку

$$SNR = 1,76 + 6,02N + K_{oc}$$

где K_{oc} – ослабление входного сигнала, выраженное в дБ. Так, если входной сигнал 12-разрядного АЦП имеет амплитуду в 10 раз меньше половины напряжения полной шкалы, то $K_{oc} = -20$ дБ и $SNR = 74$ дБ – 20 дБ = 54 дБ.

Значение реального SNR может быть использовано для **определения эффективного количества разрядов АЦП** ($ENOB$ – Effective Number of Bits). Оно определяется по формуле

$$ENOB = \frac{SNR - 1,76 \text{ дБ} + K_{oc}}{6,02}$$

Этот показатель может характеризовать действительную разрешающую способность реального АЦП. Так, 12-разрядный АЦП, у которого $SNR = 68$ дБ для сигнала с $K_{oc} = -20$ дБ является на самом деле 7-разрядным ($ENOB = 7.68$). Значение $ENOB$ сильно зависит от частоты входного сигнала, т.е. эффективная разрядность АЦП падает с увеличением частоты.

11. Суммарный коэффициент гармоник (THD – Total Harmonic Distortion) – это выраженное в децибелах отношение суммы среднеквадратических значений всех высших гармоник к среднеквадратическому значению основной гармоники

$$TND = 10 \lg \frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}$$

где n обычно ограничивают на уровне 6 или 9. Этот параметр характеризует уровень гармонических искажений выходного сигнала АЦП по сравнению с входным. THD возрастает с частотой входного сигнала.

12. Отношение «сигнал/(шум + искажения)» (Signal to Noise and Distortion — *SINAD*) также измеряется в децибелах, (шум + искажения) — это среднеквадратическое значение суммы всех составляющих сигнала вплоть до $1/2$ частоты дискретизации, кроме основной гармоники и постоянной составляющей. Определяется по формуле

$$SINAD = 10 \log[1/(10 - SNR/10 + 10THD/10)].$$

13. Время установления (Setting Time) – это время, необходимое АЦП для достижения номинальной точности после того, как на ее вход был подан ступенчатый сигнал с амплитудой, равной полному диапазону входного сигнала. Этот параметр ограничен из-за конечного быстрого действия различных узлов АЦП.

Вследствие различного рода погрешностей характеристика реального АЦП является нелинейной. Если на вход устройства с нелинейностями подать сигнал, спектр которого состоит из двух гармоник f_a и f_b , то в спектре выходного сигнала такого устройства кроме основных гармоник будут присутствовать интермодуляционные субгармоники с частотами $mf_a \pm nf_b$, где $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Субгармоники второго порядка – это $f_a + f_b, f_a - f_b$, субгармоники третьего порядка – это $2f_a + f_b, 2f_a - f_b, f_a + 2f_b, f_a - 2f_b$. Если входные синусоиды имеют близкие частоты, расположенные вблизи верхнего края полосы пропускания, то субгармоники второго порядка далеко отстоят от входных синусоид и располагаются в области нижних частот, тогда как субгармоники третьего порядка имеют частоты, близкие к входным частотам.

14. Коэффициент интермодуляционных искажений (Intermodulation Distortion) – это отношение суммы среднеквадратических значений интермодуляционных субгармоник определенного порядка к сумме среднеквадратических значений основных гармоник, выраженное в дБ

$$IMD_2 = 10 \lg \left(\frac{U_{A+B}^2 + U_{A-B}^2}{U_A^2 + U_B^2} \right)$$

$$IMD_3 = 10 \lg \left(\frac{U_{2A+B}^2 + U_{2A-B}^2 + U_{A+2B}^2 + U_{A-2B}^2}{U_A^2 + U_B^2} \right)$$

15. Время преобразования АЦП (Conversion Time). Любой способ аналого-цифрового преобразования требует некоторого конечного времени для его выполнения. Под временем преобразования АЦП понимается интервал времени от момента поступления аналогового сигнала на вход АЦП до момента появления соответствующего выходного кода. Если входной сигнал АЦП изменяется во времени, то конечное время преобразования АЦП приводит к появлению т.н. апертурной погрешности (рис. 2.2.1)

16. Апертурная погрешность.

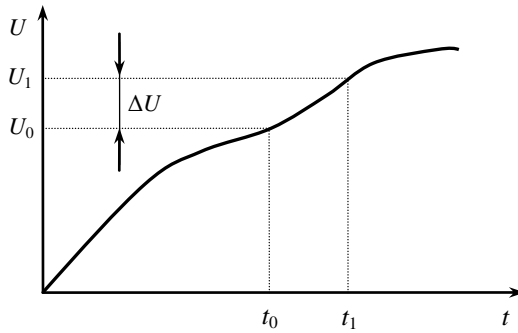


Рис. 2.2.1

Сигнал начала преобразования поступает в момент t_0 , а выходной код появляется в момент t_1 . За это время входной сигнал успел измениться на величину ΔU . Возникает неопределенность: какому уровню значения входного сигнала в диапазоне $U_0 - U_0 + \Delta U$ соответствует данный выходной код. Для сохранения точности преобразования на уровне единицы младшего разряда необходимо чтобы за время преобразования изменение значения сигнала на входе АЦП составило бы не более величины единицы младшего разряда

$$\Delta U_{\max} = U_{\text{LSB}} = \frac{U_{\text{FSR}}}{2^N}$$

Изменение уровня сигнала за время преобразования можно приблизительно вычислить как

$$\Delta U = \left. \frac{dU_{\text{in}}}{dt} \right|_{t=t_0} * T_c$$

где U_{in} – входное напряжение АЦП, T_c – время преобразования. Из этих выражений получаем

$$\frac{dU_{\text{in}}}{dt} \leq \frac{U_{\text{FSR}}}{T_c} * 2^{-N}$$

Если на входе действует синусоидальный сигнал с частотой f

$$U_{\text{in}}(t) = \frac{U_{\text{FSR}}}{2} \sin(2\pi ft)$$

то его производная будет равна

$$\frac{dU_{\text{in}}}{dt} = \frac{U_{\text{FSR}}}{2} 2\pi f \cos(2\pi ft)$$

Она принимает максимальное значение когда косинус равен 1. С учетом этого получим

$$U_{\text{FSR}} \pi f \leq \frac{U_{\text{FSR}}}{T_c} * 2^{-N}, \text{ или}$$

$$f \leq \frac{2^{-N}}{\pi T_c}$$

Конечное время преобразования АЦП приводит к требованию ограничения скорости изменения входного сигнала. Для того, чтобы уменьшить апертурную погрешность и т.о. ослабить ограничение на скорость изменения входного сигнала АЦП на входе преобразователя установив-

ливается т.н. «устройство выборки-хранения» (УВХ). Упрощенная схема УВХ представлена на рис. 2.2.2.

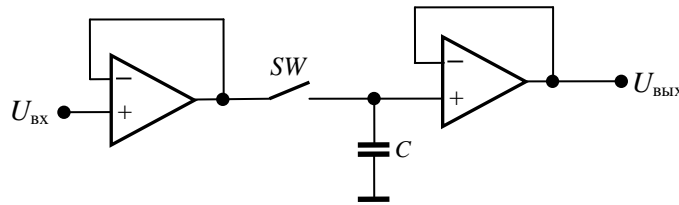


Рис. 2.2.2

Это устройство имеет два режима работы: режим выборки и режим фиксации. Режим выборки соответствует замкнутому состоянию ключа SW . В этом режиме выходное напряжение УВХ повторяет его входное напряжение. Режим фиксации включается по команде размыкающей ключ SW . При этом связь между входом и выходом УВХ прерывается, а выходной сигнал поддерживается на постоянном уровне, соответствующем уровню входного сигнала на момент поступления команды фиксации за счет заряда, накопленного на конденсаторе. Т.о., если подать команду фиксации непосредственно перед началом преобразования АЦП, то выходной сигнал УВХ будет поддерживаться на неизменном уровне в течение всего времени преобразования. После окончания преобразования УВХ снова переводится в режим выборки. Работа реального УВХ несколько отличается от идеального случая.

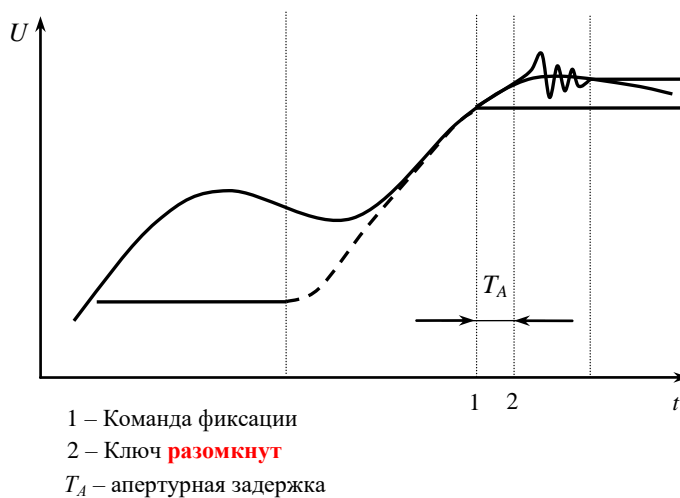


Рис. 2.2.3

Если за время хранения сигнал на входе УВХ значительно изменился по отношению к его выходному сигналу, то требуется конечное некоторое время для того, что бы после снятия команды фиксации они сравнялись. Интервал времени от момента снятия команды фиксации до момента, когда выходной сигнал УВХ станет равным входному с погрешностью $0.5U_{LSB}$, называется **временем выборки УВХ** (Track/Hold Acquisition Time). Вследствие конечного быстродействия элементов управления УВХ момент поступления команды фиксации и момент действительного размыкания ключа SW несколько отстоят друг от друга. Интервал времени от момента поступления команды фиксации до действительного момента начала фиксации называется **апертурной задержкой УВХ** (Aperture Delay). Оно определяется временем срабатывания переключающей схемы УВХ. В реальных УВХ сигнал синхронизации оказывается модулирован по фазе из-за паразитного воздействия шумов, помех питания и цифровых ли-

ний. В следствие этого величина апертурной задержки УВХ может варьироваться в некоторых пределах от выборки к выборке. Диапазон вариации апертурной задержки в последовательных отсчетах называется **апертурной неопределенностью** (Aperture Jitter). Этот эффект воспринимается как дополнительный шум и снижает действительное отношение сигнал-шум на величину

$$\Delta SNR_j = 20 \lg \left(\frac{1}{2\pi f t_A} \right)$$

где f – частота входного сигнала, t_A – величина апертурной неопределенности.

В реальных УВХ выходной сигнал не может оставаться абсолютно неизменным в течение конечного времени преобразования. Конденсатор будет постепенно разряжаться маленьким входным током выходного буфера. Для сохранения требуемой точности необходимо чтобы за время преобразования заряд конденсатора не изменился больше чем на $0.5U_{LSB}$.

17. Дифференциальная нелинейность (DNL – Differential Nonlinearity)

Из-за не идеальности элементов схемы АЦП ступеньки в различных точках характеристики АЦП отличаются друг от друга по величине и не равны U_{LSB} (рис. 4).

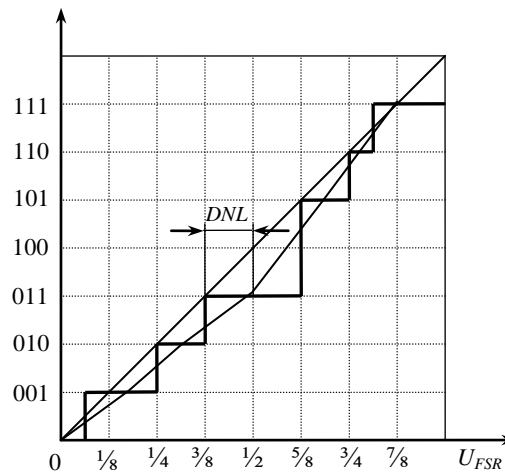


Рис.2.2.4

Отклонение расстояния между серединами двух соседних реальных шагов квантования от идеального значения шага квантования U_{LSB} называется **дифференциальной нелинейностью** (DNL – Differential Nonlinearity). Если DNL больше или равна U_{LSB} , то у АЦП могут появиться так называемые “пропущенные коды” (рис. 2.2.4). Это влечет локальное резкое изменение коэффициента передачи АЦП, что в замкнутых системах управления может привести к потере устойчивости.

18. Интегральная нелинейность. Для тех приложений, где важно поддерживать выходной сигнал с заданной точностью, важно на сколько точно выходные коды АЦП соответствуют напряжениям межкодовых переходов. Максимальное отклонение центра шага квантования на реальной характеристике АЦП от линейризованной характеристики называется **интегральной нелинейностью** (INL – Integral Nonlinearity) или **относительной точностью** (Relative Accuracy) АЦП (рис. 2.2.5).

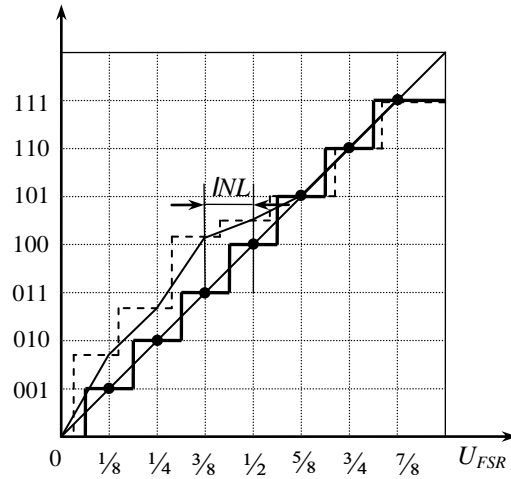


Рис. 2.2.5

Линеаризованная характеристика проводится через крайние точки реальной характеристики преобразования, после того, как они были откалиброваны, т.е. устранены ошибки смещения нуля и коэффициента преобразования.

Ошибки дифференциальной и интегральной нелинейности скомпенсировать простыми средствами практически невозможно.

Лекция 9 сентября 2019г. Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать равенство Парсеваля для ДВПФ

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y^*(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(v)Y^*(v)dv$$

2. Найти и изобразить по модулю ДВПФ 8 - точечных последовательностей

$$x(k) = \sum_{m=0}^7 \mathbf{1}(k-m) \quad \text{и} \quad y(k) = x(k) \cos(2\pi k 5/16).$$

Примеры решения задач на ДВПФ

2.3. Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов

Ответим на вопрос, как оценить спектр исходного сигнала по последовательности его отсчетов $x(k\Delta t)$, $k=0, 1, 2, \dots$. Как уже отмечалось, спектр последовательности отсчетов представляет собой периодическое (с периодом $f_d = 1/\Delta t$) повторение исходного спектра $X(f)$. Необходимая спектральная информация будет содержаться в полосе $[-f_c, f_c]$, где $f_c = f_d/2$ (рис. 2.3.1).

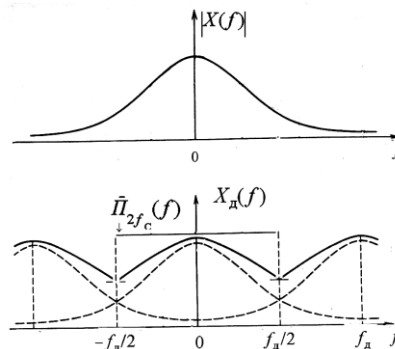


Рис. 2.3.1

Поэтому выделим из суммы

$$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m f_d) \quad (2.3.1)$$

один частичный спектр, соответствующий $m = 0$, действием фильтра, подавляющего компоненты выше $f_c = f_d / 2$. Один период спектра $X_d(f)$ в полосе $[-f_c, f_c]$, где $f_c = f_d / 2 = 1 / 2 \Delta t$ – частота Найквиста, будет отличаться от исходного $X(f)$, во-первых, тем, что не содержит спектральных составляющих выше частоты $f_c = f_d / 2$, а во-вторых, тем, что содержит "лишние" составляющие за счёт наложения.

Отфильтрованный сигнал в соответствии с теоремой Котельникова может быть представлен в виде

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \Delta t) \frac{\sin 2\pi f_c (t - k \Delta t)}{2\pi f_c (t - k \Delta t)}.$$

Отсюда следует важное соотношение

$$\hat{x}(k \Delta t) = x(k \Delta t). \quad (2.3.2)$$

В отсчетных точках $t = k \Delta t$ функции $\hat{x}(t)$ и $x(t)$ совпадают.

Преобразование Фурье сигнала $\hat{x}(t)$ будет

$$\begin{aligned} \hat{X}(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi f_c (t - k \Delta t)}{2\pi f_c (t - k \Delta t)} e^{-j2\pi f (t - k \Delta t)} dt = \\ &= \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t} \hat{P}_{2f_c}(f), \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

где

$$\hat{P}_{2f_c}(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } |f| \leq f_c = 1 / 2 \Delta t, \\ 0 & \text{при других } f. \end{cases}$$

Входящий в (2.3.3) ряд

$$\Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t}$$

есть ряд Фурье периодической функции $X_d(f)$. Действительно, периодическую (с периодом $f_d = 1 / \Delta t$) функцию $X_d(f)$ можно представить рядом Фурье (по частоте)

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{-jk(2\pi/f_d)f} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{-j2\pi f k \Delta t},$$

где коэффициенты Фурье с учётом (2.3.2) равны

$$c_{-k} = (1/f_d) \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df = \Delta t \hat{x}(k \Delta t) = \Delta t x(k \Delta t). \quad (2.3.4)$$

Подставляя эти коэффициенты, получим

$$X_d(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t}. \quad (2.3.5)$$

Это есть *прямое дискретное во времени преобразование Фурье* (ДВПФ) последовательности $x(k)$. Обратное ДВПФ в соответствии с (2.3.4) будет

$$x(k \Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df. \quad (2.3.6)$$

Рис. 2.3.1 иллюстрирует связь полученной оценки спектра $\hat{X}(f)$ с исходным спектром $X(f)$. Видно, что оценка спектра, полученная по дискретным отсчетам сигнала, отличается от исходного спектра, во-первых, отсутствием компонент выше частоты $f_c = f_d / 2 = 1 / 2 \Delta t$, а во-вторых, наличием "лишних" составляющих вследствие эффекта наложения, вызванного дискретизацией и нефинитностью исходного спектра.

Отбрасывание «хвостов» спектра для $|f| > f_c$ сопровождается среднеквадратической ошибкой

$$\varepsilon_{\min}^2 = \int_{-\infty}^{-f_c} |X(f)|^2 df + \int_{f_c}^{\infty} |X(f)|^2 df. \quad (2.3.7)$$

Эффект наложения приводит к дополнительной ошибке

$$\varepsilon_{\text{доп}}^2 = \int_{-f_c}^0 \left| \sum_{|n|=1}^{\infty} X(f + nf_d) \right|^2 df + \int_0^{f_c} \left| \sum_{|n|=1}^{\infty} X(f + nf_d) \right|^2 df. \quad (2.3.8)$$

Наилучшим способом дискретизации сигнала с нефинитным спектром является представление с помощью коэффициентов Фурье:

$$c_k = \frac{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_k)}{(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin \pi f_d (t - k\Delta t)}{\pi f_d (t - k\Delta t)} dt, \quad (2.3.9)$$

которые уже не равны отсчётам $x(k\Delta t)$. Действительно, применяя к (2.3.9) обобщенное равенство Парсевала

С учётом обобщённого равенства Парсевала

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df$$

будем иметь

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \Pi_{2f_c}(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df = \\ &= \int_{-f_c}^{f_c} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df = x_1(k\Delta t), \end{aligned}$$

т.е. коэффициенты Фурье c_k равны выборкам сигнала $x_1(t)$, имеющего финитный спектр

$$X_1(f) = \begin{cases} X(f) & \text{при } f \in [-f_c, f_c], \\ 0 & \text{при других } f. \end{cases}$$

Восстановленный по этим коэффициентам сигнал

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{\sin \pi f_d (t - k\Delta t)}{\pi f_d (t - k\Delta t)} \quad (2.3.10)$$

также будет отличаться от исходного $x(t)$. Среднеквадратическая ошибка определяется энергией отброшенных «хвостов» спектра с частотами $|f| > f_c$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\min}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f) - X_1(f)|^2 df \text{ или} \\ \varepsilon_{\min}^2 &= \int_{-\infty}^{-f_c} |X(f)|^2 df + \int_{f_c}^{\infty} |X(f)|^2 df. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Если вместо c_k в (2.3.10) взять отсчёты $x(k\Delta t)$, то к ошибке добавится ошибка за счет наложения частичных спектров:

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_{\min}^2 + \varepsilon_{\text{доп}}^2,$$

где

$$\varepsilon_{\text{доп}}^2 = \int_{-f_c}^0 \left| \sum_{|n|=1}^{\infty} X(f + nf_d) \right|^2 df + \int_0^{f_c} \left| \sum_{|n|=1}^{\infty} X(f + nf_d) \right|^2 df \quad (2.3.11)$$

зависит от интенсивности компонент спектра при $|f| > f_c$. Поэтому для ослабления эффекта наложения сигнал перед дискретизацией пропускают через фильтр нижних частот (рис. 2.3.2) с целью подавления высокочастотных составляющих сигнала выше частоты $f_c = f_d / 2 = 1 / 2\Delta t$, чтобы не допустить их свертывание в информационную часть спектра $[-f_c, f_c]$.

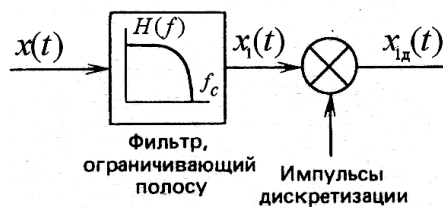


Рис. 2.3.2