

Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).

Лекции по курсу “Дискретные преобразования сигналов”

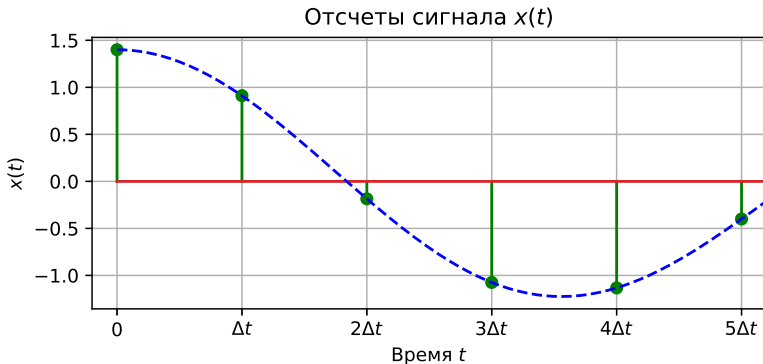
12 марта 2019

ФРТК МФТИ, 2019

Оценка спектра сигнала по последовательности отсчетов

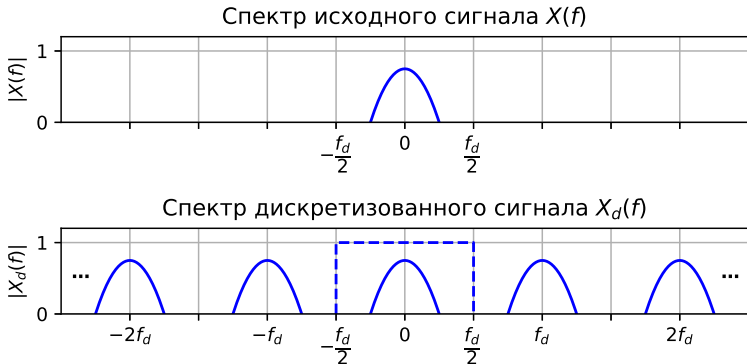
Последовательность отсчетов сигнала

Пусть есть последовательность отсчетов $x(k\Delta t)$, $k \in \mathbb{Z}$ некоторого аналогового сигнала. Будем считать, что спектр исходного сигнала ограничен интервалом $[-f_d/2; f_d/2]$, а соответственно не наблюдается эффект наложения.



Периодическое повторение спектра

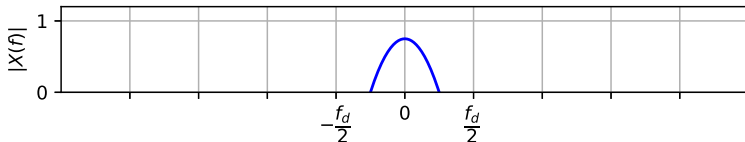
Спектр дискретизированного сигнала $X_d(f)$ представляет собой периодическое повторение исходного спектра $X(f)$ (спектра аналогового сигнала) с периодом, равным частоте дискретизации $f_d = 1/\Delta t$.



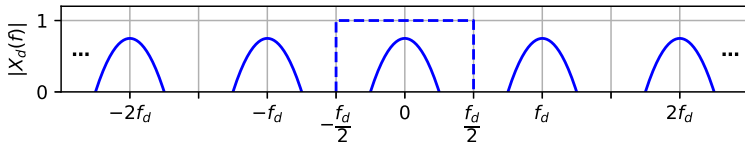
Периодическое повторение спектра

$$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_d).$$

Спектр исходного сигнала $X(f)$



Спектр дискретизованного сигнала $X_d(f)$



Представление $X_d(f)$ в виде ряда Фурье по частоте

$$\begin{aligned} X_d(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{-jk(2\pi/f_d)f} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{-j2\pi f k \Delta t}, \\ c_{-k} &= \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df = \\ &= \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f(k\Delta t)} df = \Delta t x(k\Delta t). \end{aligned}$$

Получаем пару ДВПФ (прямое и обратное преобразование)

$$\begin{aligned} X_d(f) &= \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t}, \\ x(k\Delta t) &= \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df. \end{aligned}$$

Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ)

$$X_d(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t},$$
$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df.$$

Сигнал $x(k\Delta t)$, $k \in Z$ имеет форму функции дискретного времени и может быть представлен в виде последовательности отсчетов.

Функция $X_d(f)$ принимает комплексные значения, является непрерывной и периодической с периодом f_d , а ее главным периодом обычно считают отрезок $[-f_d/2; f_d/2]$.

Различные формы записи ДВПФ

Запись ДВПФ через переменную ω (рад/с)

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t},$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df.$$

Если принять $2\pi f = \omega$, а частоту дискретизации взять в рад/с ($\omega_d = 2\pi/\Delta t$), то

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \exp(-j\omega k \Delta t), \quad (1)$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega. \quad (2)$$

Запись ДВПФ через переменную $\nu = f/f_d$

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t},$$
$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df.$$

Введем нормированные частоты $\nu = f/f_d$ и примем $\Delta t = 1$ ($f_d = 1/\Delta t$). Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi \nu k}, \quad (3)$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi \nu k} d\nu. \quad (4)$$

Запись ДВПФ через переменную $\theta = 2\pi\omega/\omega_d$

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \exp(-j\omega k\Delta t),$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) \exp(j\omega k\Delta t) d\omega.$$

Аналогично можно принять $\theta = 2\pi\omega/\omega_d$ и $\Delta t = 1$, тогда

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k}, \quad (5)$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) e^{j\theta k} d\theta. \quad (6)$$

Формы записи ДВПФ ($\omega = 2\pi f$, $\nu = f/f_d$, $\theta = 2\pi\omega/\omega_d$)

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t}$$

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j\omega k \Delta t}$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) e^{j\omega k \Delta t} d\omega$$

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi \nu k}$$

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k}$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi \nu k} d\nu$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) e^{j\theta k} d\theta$$

Сходимость ДВПФ

Обратимость пары ДВПФ

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\theta k}$$
$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)e^{j\theta k} d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\theta m} \right) e^{j\theta k} d\theta = \hat{x}(k).$$

Нужно показать, что $\hat{x}(k) = x(k)$. Если ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\theta m}$ равномерно сходится на множестве определения θ , то его можно почленно интегрировать, и тогда

$$\hat{x}(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\theta(k-m)} d\theta \right).$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\theta(k-m)} d\theta = \frac{\sin \pi(k-m)}{\pi(k-m)} = \mathbf{1}(k-m) = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \neq k. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\theta(k-m)} d\theta \right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \mathbf{1}(k-m) = x(k). \end{aligned}$$

Достаточное условие существования ДВПФ

Теперь достаточное условие существования ДВПФ можно получить следующим образом:

$$|X(\theta)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| \left| e^{-j\theta k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| \leq \infty$$

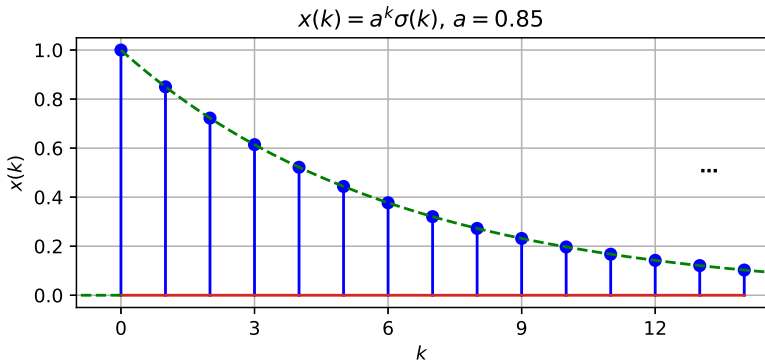
В итоге для абсолютно суммируемых последовательностей отсчетов $x(k)$ ДВПФ существует и формулы обратимы.

Заметим, что любая последовательность отсчетов конечной длительности является абсолютно суммируемой, а значит для нее можно определить ДВПФ.

Пример 1. $x(k) = a^k \sigma(k)$

$x(k) = a^k \sigma(k)$, где $\sigma(k)$ – дискретная функция включения.

$$\begin{aligned} X(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k \sigma(k) e^{-j\theta k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-j\theta k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (a e^{-j\theta})^k = \frac{1}{1 - a e^{-j\theta}} \text{ при } |a| < 1. \end{aligned}$$



Свойства ДВПФ

Предложим, что для последовательности $x(k)$ ДВПФ спектр будет $X(\nu)$, что символически будем обозначать ;

$$x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu).$$

Пусть также $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$.

Рассмотрим далее свойства ДВПФ.

Линейность ДВПФ

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$ и $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$, то

$$\alpha x(k) + \beta y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \alpha X(\nu) + \beta Y(\nu), \quad (7)$$

где α, β - фиксированные числа.

Это свойство следует непосредственно из соответствующих свойств интеграла и суммы.

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k}$$

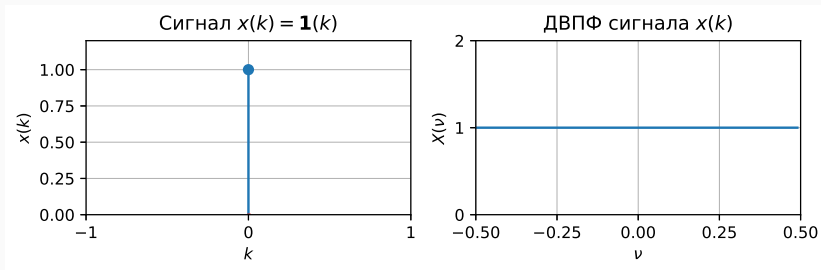
$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi\nu k} d\nu$$

Единичный импульс

$$\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{1}(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} 1 \quad (8)$$

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi\nu k} = x(0)e^0 = 1$$



Теорема запаздывания

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$, то

$$x(k - m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu) e^{-j2\pi\nu m} \quad (9)$$

При $m > 0$ $x(k - m)$ – это сигнал, запаздывающий относительно сигнала $x(k)$ на m временных отсчетов.

Пример. $x(k) = \mathbf{1}(k)$, $X(\nu) = 1$

$$x(k - 1) = \mathbf{1}(k - 1), Y(\nu) = e^{-j2\pi\nu}$$

$$x(k + 1) = \mathbf{1}(k + 1), Z(\nu) = e^{j2\pi\nu}$$



Теорема запаздывания

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$, то

$$x(k - m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)e^{-j2\pi\nu m} \quad (10)$$

Докажем это свойство.

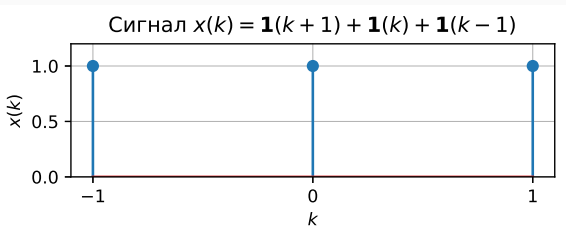
Возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)e^{-j2\pi\nu m}e^{j2\pi\nu k}d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)e^{j2\pi\nu(k-m)}d\nu = x(k-m).$$

Пример 2. Три единичных импульса.

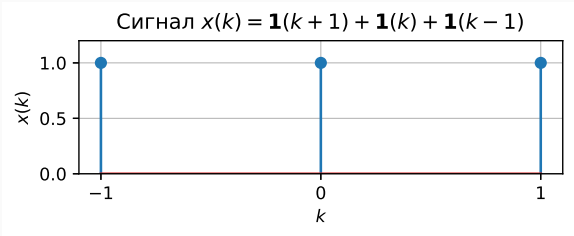
Рассмотрим в качестве примера последовательность единичных импульсов $x(k) = \mathbf{1}(k + 1) + \mathbf{1}(k) + \mathbf{1}(k - 1)$, где

$$\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$



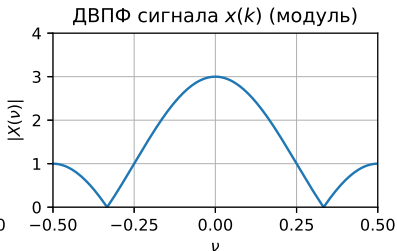
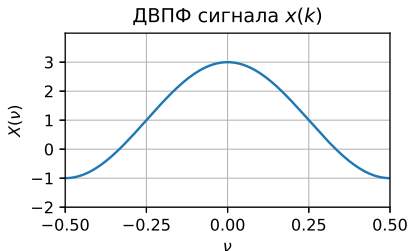
Пример 2. Три единичных импульса.

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi\nu k} = \\ &= \sum_{k=-1}^1 x(k)e^{-j2\pi\nu k} = x(-1)e^{j2\pi\nu} + x(0)e^0 + x(1)e^{-j2\pi\nu} = \\ &= \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu); \end{aligned}$$



Пример 2. Три единичных импульса.

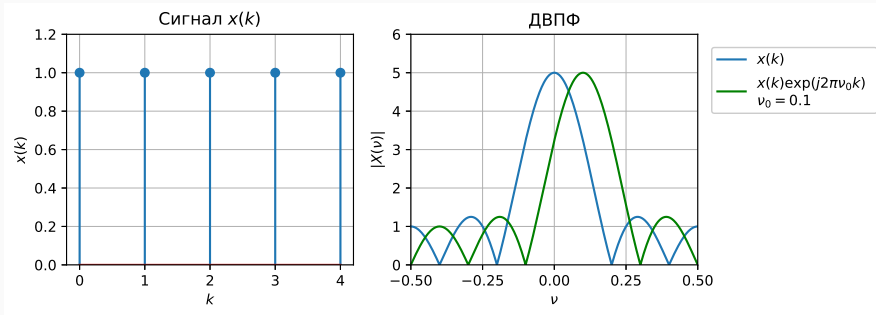
$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi\nu k} = \\ &= \sum_{k=-1}^1 x(k)e^{-j2\pi\nu k} = x(-1)e^{j2\pi\nu} + x(0)e^0 + x(1)e^{-j2\pi\nu} = \\ &= \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu); \end{aligned}$$



Теорема смещения

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$, то

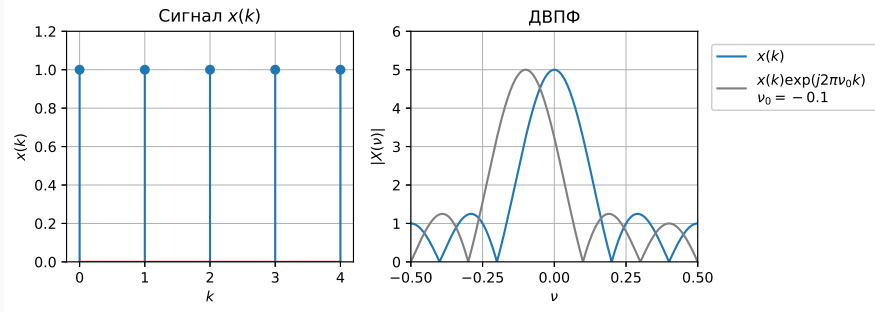
$$x(k)e^{j2\pi\nu_0 k} \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu - \nu_0) \quad (11)$$



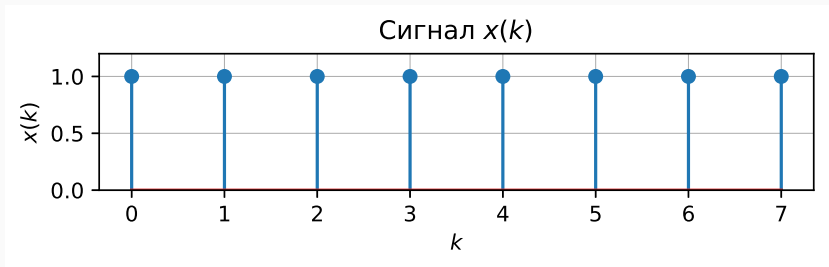
Теорема смещения

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$, то

$$x(k)e^{j2\pi\nu_0 k} \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu - \nu_0)$$



Пример 3. Последовательность из N импульсов



$N=8$ последовательных единичных импульсов

$$x(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(k - m)$$

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k}$$

Пример 3. Последовательность из N импульсов

В точках $\nu = n$, где n -целое

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k} = N$$

В точках $\nu \neq n$, где n -целое

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k} = \frac{1 - e^{-j2\pi\nu N}}{1 - e^{-j2\pi\nu}} \\ &= \frac{e^{-j\pi\nu N}}{e^{-j\pi\nu}} \frac{e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N}}{e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}} = e^{-j(N-1)\pi\nu} \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \\ |X(\nu)| &= \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right| \end{aligned}$$

Пример 3. Последовательность из N импульсов

$$x(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(k-m)$$

$$|X(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|$$

$$X(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) = 8$$

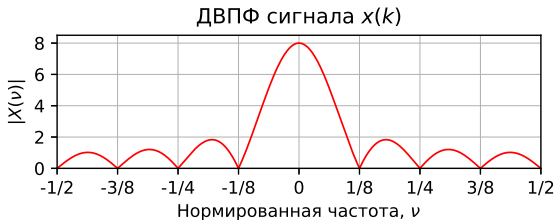
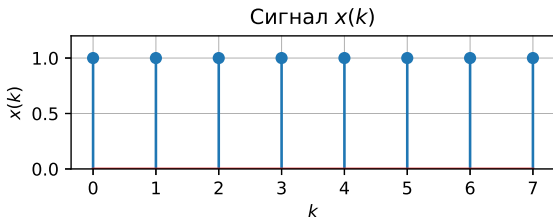
Прямоугольное

окно

ширина главного

лепестка

$$\Delta\nu = 2/N$$



Равенство Парсеваля. Пример 4.

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$ и $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu \quad (12)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y^*(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) Y^*(\nu) d\nu \quad (13)$$

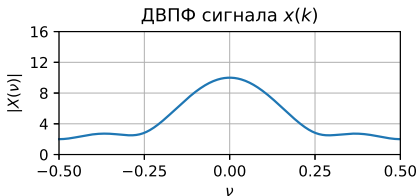
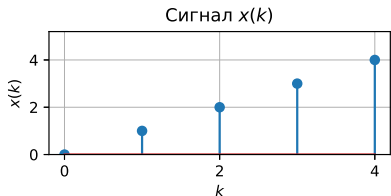
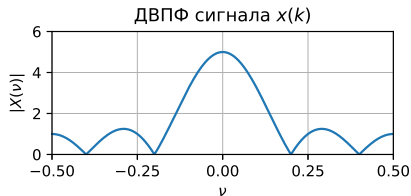
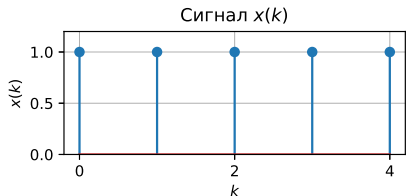
Пример 4. Предположим, что имеется финитная последовательность $x(k) = \{1; \underbrace{1}_{k=0}; 1\}$. Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = 3.$$

При этом $\int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} |1 + 2 \cos(2\pi\nu)|^2 d\nu = 3$

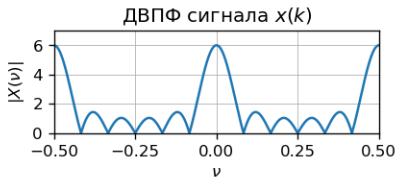
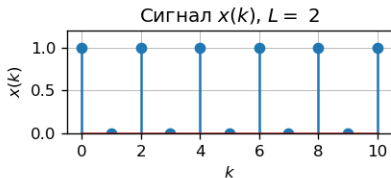
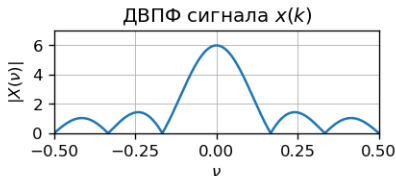
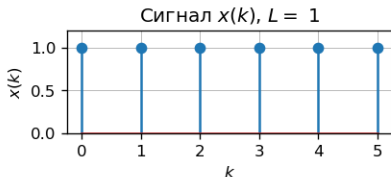
Умножение на k и дифференцирование по частоте

$$kx(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{j}{2\pi} \frac{dX(\nu)}{d\nu} \quad (14)$$



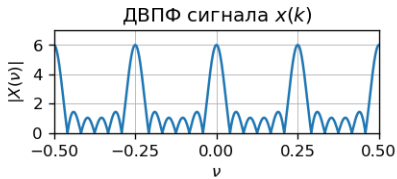
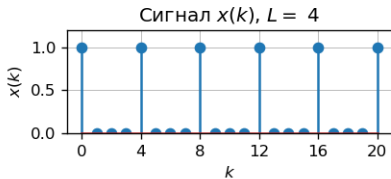
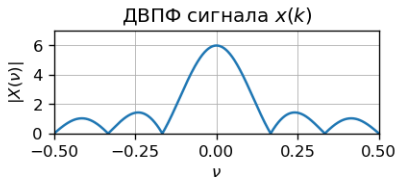
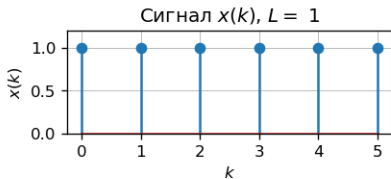
Изменение масштаба. Пример 5.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu L) \quad (15)$$



Изменение масштаба. Пример 5.

$$|X_L(\nu)| = \left| \frac{\sin(6\pi\nu L)}{\sin(\pi\nu L)} \right|.$$



Изменение масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu L)$$

Для того, чтобы доказать свойство, вычислим ДВПФ для последовательности в левой части

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathbf{1}(k - mL) \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL) \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \exp(-j2\pi(\nu L)m) = X(\nu L). \end{aligned}$$

Теоремы о свертке

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$ и $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$, то

1.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)Y(\nu). \quad (16)$$

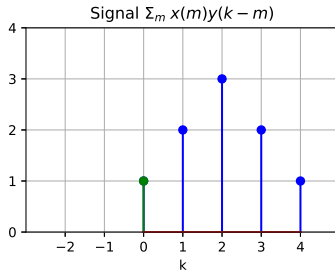
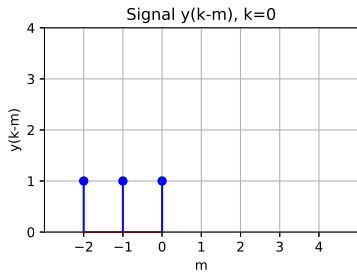
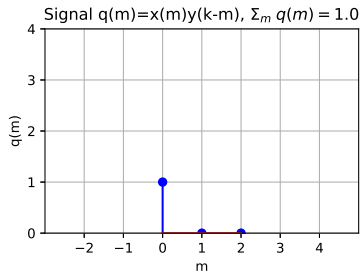
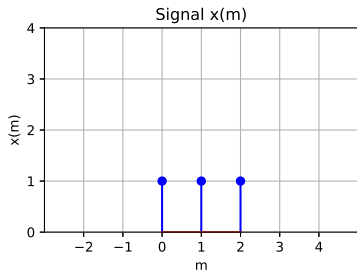
В левой части стоит дискретная свертка сигналов, в правой — произведение спектров.

2.

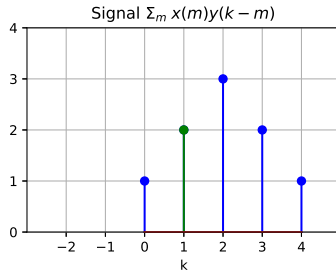
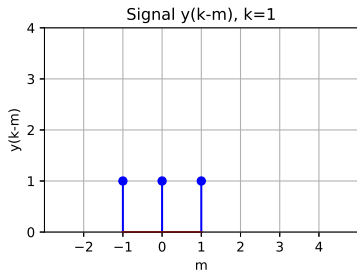
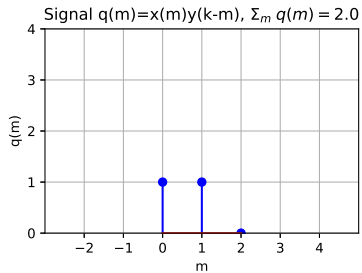
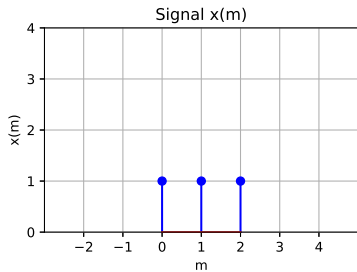
$$x(k)y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{\nu})Y(\nu - \tilde{\nu})d\tilde{\nu} \quad (17)$$

В левой части стоит произведение сигналов, в правой — свертка (циклическая) спектров.

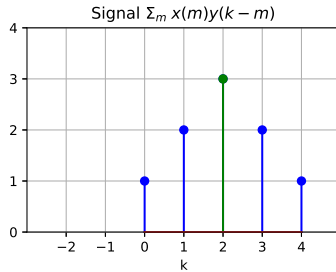
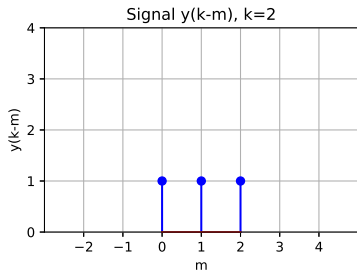
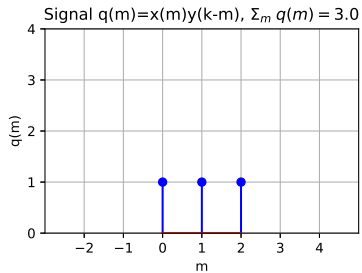
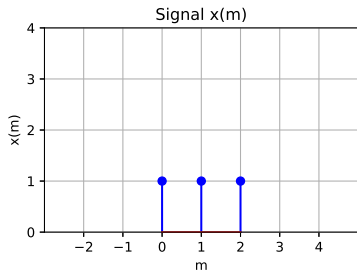
Теоремы о свертке



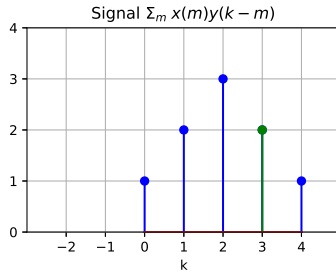
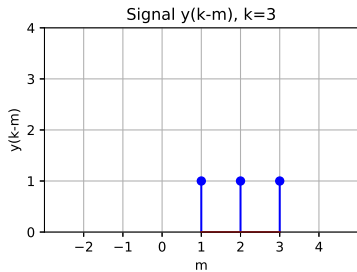
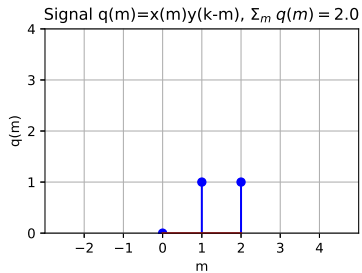
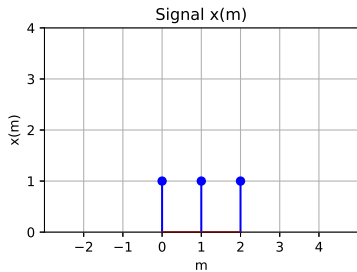
Теоремы о свертке



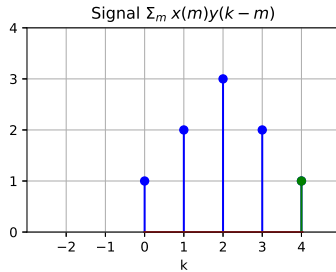
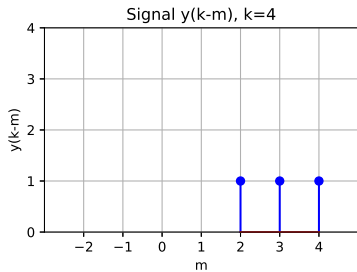
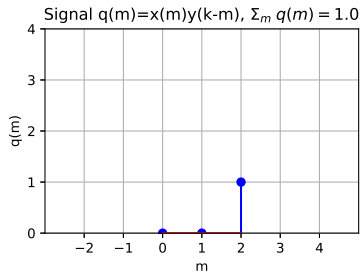
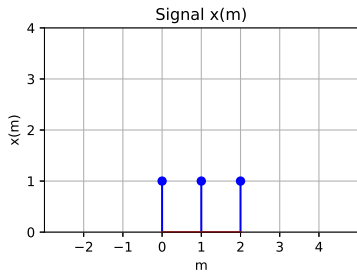
Теоремы о свертке



Теоремы о свертке

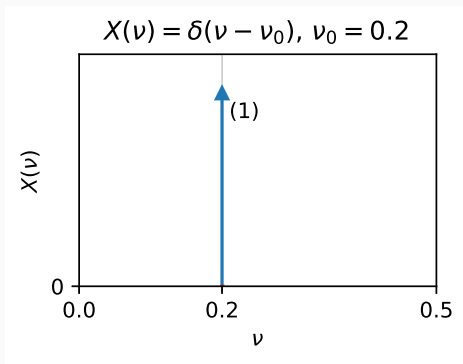


Теоремы о свертке



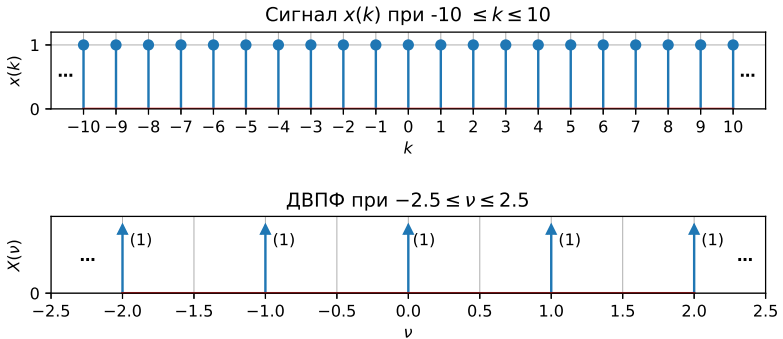
Дельта-функция

Для дельта-функции в точке ν_0 интеграл $\int_{\nu_0-\varepsilon}^{\nu_0+\varepsilon} \delta(\nu - \nu_0) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда площадь под графиком равна 1 и обозначается на графике как (1).



Периодическая последовательность единичных импульсов

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n) \quad (18)$$



Периодическая последовательность единичных импульсов

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \right) \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu m) \end{aligned}$$

Периодическая последовательность единичных импульсов

$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu m)$ – ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности δ -функций с периодом 1:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m} \exp(-j2\pi\nu m),$$

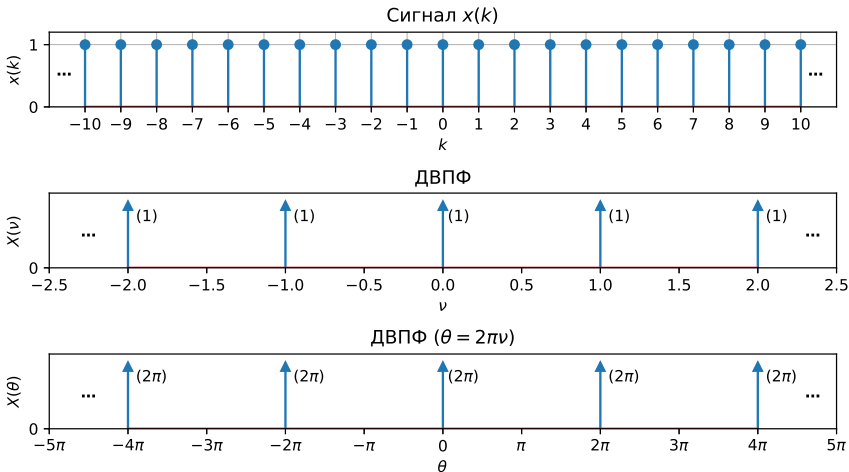
где коэффициенты Фурье

$$C_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(\nu) \exp(j2\pi\nu m) d\nu = e^0 = 1.$$

Тогда $X(\nu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$$

Периодическая последовательность единичных импульсов



$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n)$$

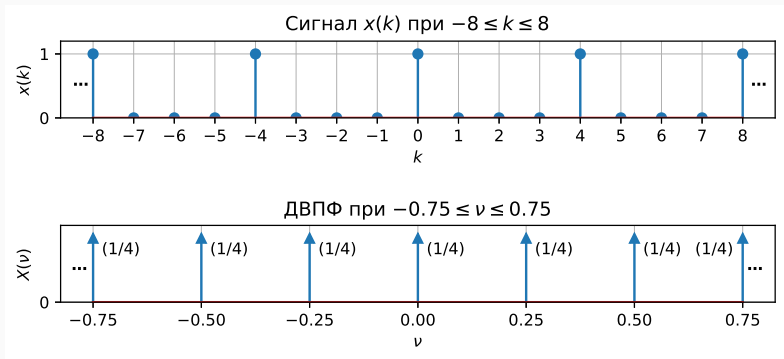
Используя свойство $\delta(a\nu - b) = \frac{1}{|a|}\delta(\nu - \frac{b}{a})$, можно получить запись этого свойства в переменных $\theta = 2\pi\nu$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi n). \quad (19)$$

Важно заметить, что при смене частотных осей здесь изменяется площади δ -функции.

Последовательность единичных импульсов с периодом L

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right) \quad (20)$$



Последовательность единичных импульсов с периодом L

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right)$$

Доказательство (1 способ):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$$

по свойству (15) об изменении масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu L - n)$$

Используя свойство δ -функции $\delta(a\nu - b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(\nu - \frac{b}{a}\right)$ получаем (20).

Последовательность единичных импульсов с периодом L

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right)$$

Доказательство (2 способ):

$$\begin{aligned} X_L(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL) \right) \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu Lm) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right). \end{aligned}$$

Последнее равенство верно, поскольку $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu Lm)$ – это ряд Фурье для периодической последовательности δ -функции с площадями $1/L$ и периодом $1/L$.

Последовательность единичных импульсов с периодом L

Последнее равенство верно, поскольку $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu Lm)$ – это ряд Фурье для периодической последовательности δ -функции с площадями $1/L$ и периодом $1/L$.

$$\frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m} \exp(-j2\pi\nu Lm),$$

где коэффициенты Фурье

$$C_{-m} = L \int_{-0.5}^{0.5} \frac{1}{L} \delta(\nu) \exp(j2\pi\nu Lm) d\nu = 1$$

Периодические последовательности в общем виде

Пусть аналоговый периодический сигнал $x(t)$ с периодом T дискретизирован с шагом $\Delta t = T/N$. Тогда на одном периоде $x(t)$ будет содержаться N отсчетов. Далее примем при анализе последовательностей для краткости записи $\Delta t = 1$.

Выделим для последовательности отсчетов $x(k)$ один период

$$x_N(k) = \begin{cases} x(k), & 0 \leq k \leq N-1; \\ 0, & \{k < 0\} \cup \{k \geq N\}. \end{cases} \quad (21)$$

Пусть $x_N(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X_N(\nu)$.

Периодические последовательности в общем виде

Поскольку последовательность $x(k)$ может быть представлена в виде дискретной сверки $x_N(k)$ и $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mN)$, а значит

$$X(\nu) = X_N(\nu) \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right). \quad (22)$$

ДВПФ периодической последовательности $x(k)$ имеет дискретную структуру, которой в континуальной записи соответствует некоторый периодический набор δ -функции.

Периодические последовательности в общем виде

Введем периодическую функцию дискретного аргумента $X[n]$, значения которой будут соответствовать площадям дельта-функций в $X(\nu)$ в точках $\nu = n/N$. В таком случае

$$X[n] = \frac{1}{N} X_N\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j2\pi \frac{n}{N} k).$$

$$\begin{aligned} x(k) &= \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \exp(j2\pi \nu k) d\nu = \int_0^1 X(\nu) \exp(j2\pi \nu k) d\nu = \\ &= \int_0^1 X_N(\nu) \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right) \exp(j2\pi \nu k) d\nu = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_N\left(\frac{n}{N}\right) \exp(j2\pi \frac{n}{N} k) \end{aligned}$$

$$X[n] = \frac{1}{N} X_N\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j2\pi \frac{n}{N} k). \quad (23)$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp(j2\pi \frac{n}{N} k) \quad (24)$$

Формула (23) определяет прямое, а (24) обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ). В ДПФ и частотная (n), и временная (k) переменная дискретна, функция $X[n]$ периодична с периодом N , а в качестве главного периода для отсчетов ДПФ выбирают такой, на котором $n = 0, \dots, N - 1$.

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), \quad -\infty < k < +\infty \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n) \quad (25)$$

Доказательство.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$$

по теореме смещения (свойство (23))

$x(k)e^{j2\pi\nu_0 k} \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu - \nu_0)$ получаем, что

$$\exp(j2\pi\nu_0 k) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

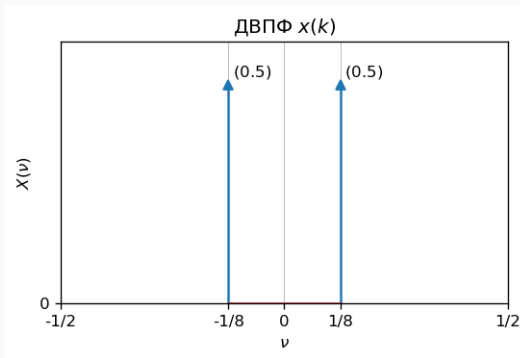
Пример. Косинусоидальный сигнал.

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), \quad -\infty < k < +\infty \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n)$$

$$x(k) = \cos(2\pi k\nu_0), \quad \text{где } \nu_0 = 1/8$$

$$x(k) = \frac{1}{2} \exp(j2\pi k\nu_0) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi k\nu_0)$$

$$X(\nu) = 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - m) + 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu + \nu_0 - m)$$



Пример 6.

Предположим, что имеется периодическая последовательность ($-\infty < k < +\infty$)

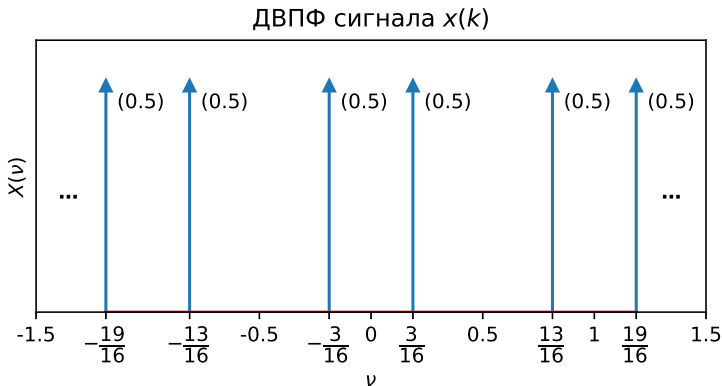
$$x(k) = \cos(2\pi \frac{3}{16} k).$$

Учитывая, что $\cos(2\pi \frac{3}{16}) = \frac{1}{2} \exp(j2\pi \nu_0 k) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi \nu_0 k)$, получаем для ДВПФ этой последовательности

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta(\nu - \frac{3}{16} - n) + \frac{1}{2} \delta(\nu + \frac{3}{16} - n).$$

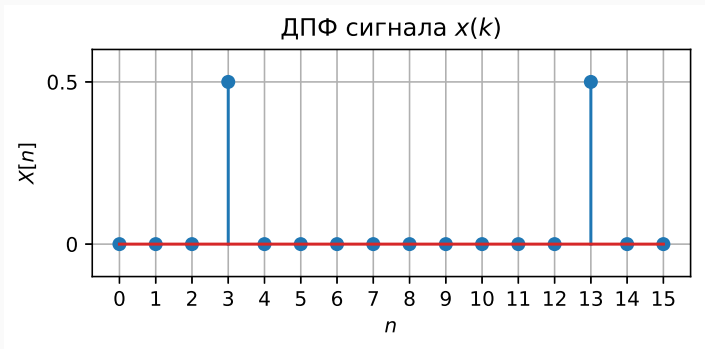
Пример 6.

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta\left(\nu - \frac{3}{16} - n\right) + \frac{1}{2} \delta\left(\nu + \frac{3}{16} - n\right).$$



Пример 6.

Значения 16-точечного ДПФ $X[n]$. $X[3] = 1/2$, $X[13] = 1/2$, а в остальных точках главного периода $X[n] = 0$.



Пример 6.

Вычислим ДПФ с использованием формулы (23).

$$\begin{aligned} X[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi \frac{3}{16} k) \exp(-j2\pi \frac{n}{N} k) = \\ &= \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{15} \frac{1}{2} \exp\left(j2\pi k\left(\frac{3}{16} - \frac{n}{16}\right)\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-j2\pi k\left(\frac{3}{16} + \frac{n}{16}\right)\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно сумму вида $\sum_{k=0}^{15} \exp(j2\pi k \frac{m}{16})$ при условии, что m – целое число, не равное нулю и не кратное 16. В таком случае по формуле суммы геометрической прогрессии

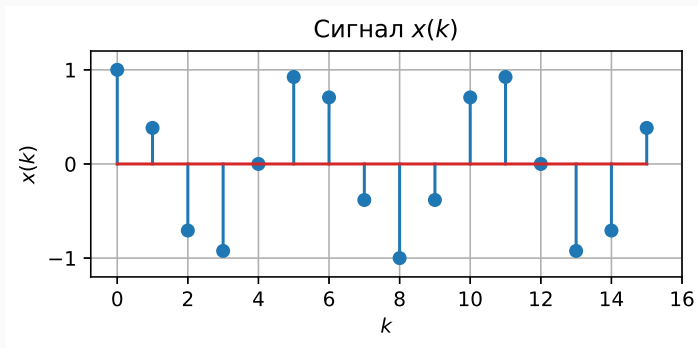
$$\sum_{k=0}^{15} \exp\left(j2\pi k \frac{m}{16}\right) = \frac{1 - \exp(j2\pi m)}{1 - \exp(j2\pi m \frac{1}{16})} = 0.$$

В случае, когда m либо равно нулю, либо кратно 16, будет выполняться $\sum_{k=0}^{15} \exp(j2\pi k \frac{m}{16}) = 16$.

Пример 7.

$$y(k) = x(k)w(k), \quad x(k) = \cos(2\pi \frac{3}{16}k)$$

$$w(k) = \sum_{n=0}^{15} \mathbf{1}(k - n).$$



Пример 7.

$$w(k) = \sum_{n=0}^{15} \mathbf{1}(k - n).$$

$$W(\nu) = e^{-j(N-1)\pi\nu} \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}.$$

$$x(k) = \cos(2\pi \frac{3}{16} k).$$

$$X(\nu) = 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \frac{3}{16} - m) + 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu + \frac{3}{16} - m).$$

Пример 7.

Способ 1. По свойству (17) ДВПФ последовательности $Y(\nu)$ может быть представлено в виде циклической свертки

$$Y(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{\nu})W(\nu - \tilde{\nu})d\tilde{\nu} = \int_{-1/2}^{1/2} W(\tilde{\nu})X(\nu - \tilde{\nu})d\tilde{\nu}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(\nu)\delta(\nu - \nu_1)d\nu = \begin{cases} W(\nu_1), & a < \nu_1 < b, \\ 0.5W(\nu_1), & (\nu_1 = a) \cup (\nu_1 = b), \\ 0, & (\nu_1 < a) \cup (\nu_1 > b), \end{cases}$$

получаем, что

$$Y(\nu) = 0.5W(\nu - \frac{3}{16}) + 0.5W(\nu + \frac{3}{16}).$$

Пример 7.

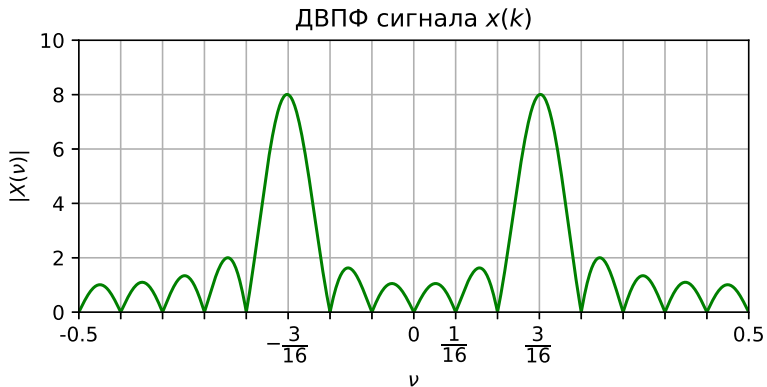
Способ 2. Аналогично через теорему смещения

$$y(k) = \left(\frac{1}{2} \exp(j2\pi k \frac{3}{16}) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi k \frac{3}{16}) \right) w(k),$$

$$Y(\nu) = 0.5W(\nu - \frac{3}{16}) + 0.5W(\nu + \frac{3}{16}).$$

$$Y(\nu) = \frac{1}{2} \exp \left(-j(N-1)\pi(\nu - \frac{3}{16}) \right) \frac{\sin(N\pi(\nu - \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(\nu - \frac{3}{16}))} + \\ + \frac{1}{2} \exp \left(-j(N-1)\pi(\nu + \frac{3}{16}) \right) \frac{\sin(N\pi(\nu + \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(\nu + \frac{3}{16}))}.$$

Пример 7.



Явление Гиббса

Рассмотрим идеальный фильтр нижних частот (ИФНЧ), частотная характеристика которого по переменной θ периодическая с периодом 2π и равна на промежутке $[-\pi; \pi]$

$$H_0(\theta) = \begin{cases} 1, & |\theta| < \theta_c, \\ 0, & \theta_c < |\theta| \leq \pi. \end{cases}$$

Импульсная характеристика

$$h_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_c}^{\theta_c} e^{j\theta k} d\theta = \frac{1}{\pi k} \frac{e^{j\theta_c k} - e^{-j\theta_c k}}{2j} = \frac{\sin(\theta_c k)}{\pi k} \quad (26)$$

$$h_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_c}^{\theta_c} e^{j\theta k} d\theta = \frac{1}{\pi k} \frac{e^{j\theta_c k} - e^{-j\theta_c k}}{2j} = \frac{\sin(\theta_c k)}{\pi k}$$

Заметим, что импульсная характеристика $h_0(k)$ некаузальна (не обращается тождественно в нуль при $k < 0$). Это означает, что идеальный фильтр нижних частот не реализуем.

Последовательность $h_0(k)$ не является абсолютно суммируемой, члены последовательности стремятся к нулю не быстрее, чем $1/k$. При этом ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\theta_c k)}{\pi k} e^{-j\theta k}$$

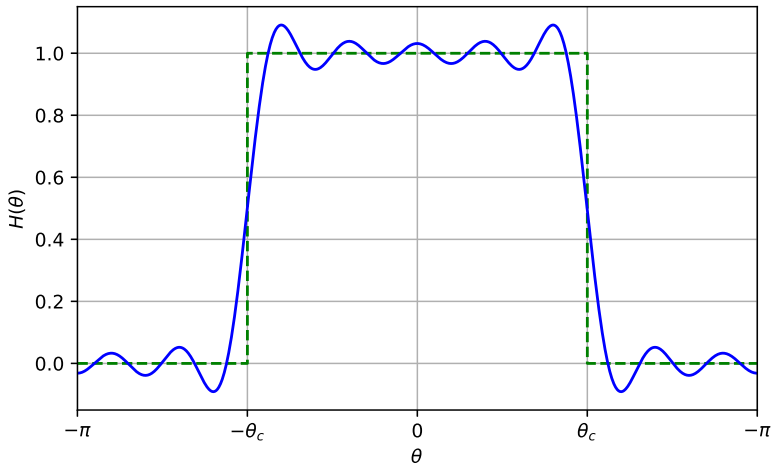
сходится неравномерно на числовой оси.

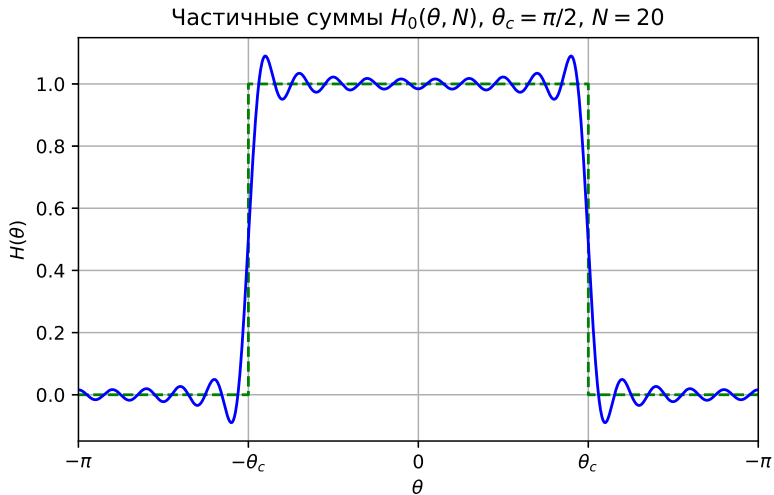
$$H_0(\theta, N) = \sum_{k=-N}^N \frac{\sin(\theta_c k)}{\pi k} e^{-j\theta k}. \quad (27)$$

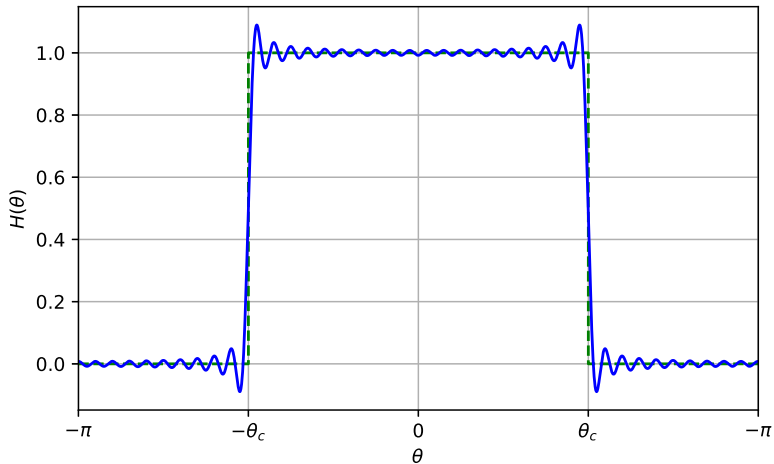
$H_0(\theta, N)$ сходится к $H_0(\theta)$ в среднеквадратичном:

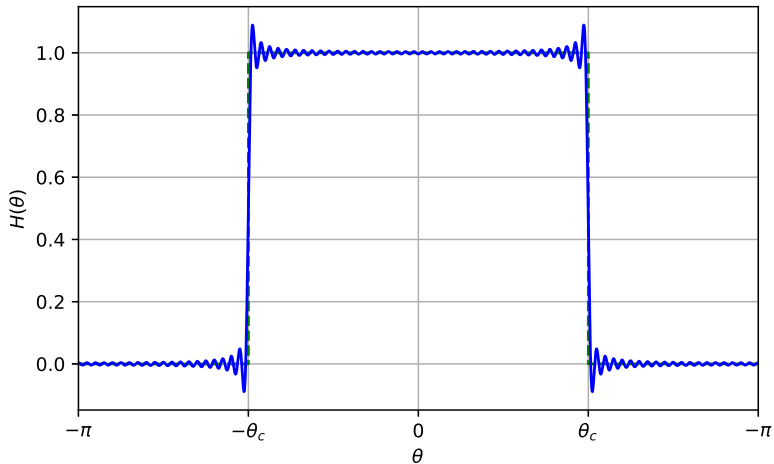
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H_0(\theta) - H_0(\theta, N)|^2 d\theta = 0.$$

При достаточно больших N мы можем наблюдать отличие лишь вблизи точек разрыва $H_0(\theta)$. Учет поведения частичных сумм ДВПФ важен при разработке дискретных фильтров.

Частичные суммы $H_0(\theta, N)$, $\theta_c = \pi/2$, $N = 10$ 



Частичные суммы $H_0(\theta, N)$, $\theta_c = \pi/2$, $N = 40$ 

Частичные суммы $H_0(\theta, N)$, $\theta_c = \pi/2$, $N = 80$ 

Частичные суммы $H_0(\theta, N)$, $\theta_c = \pi/2$, $N = 120$ 