

## Предисловие

**Лекционный курс «Цифровая обработка сигналов» (ЦОС) (3 семестра):**

**6-й семестр:** «Дискретные преобразования сигналов», 10 групп, диф. зачет.

**9-й семестр:** «Основы цифровой обработки сигналов», 10 групп, магистерский экзамен.

**10-й семестр:** «Цифровая обработка сигналов», 10 групп, магистерский экзамен.

В 6-ом семестре в лекционном курсе «Дискретные преобразования сигналов» будут рассмотрены

- теорема Котельникова и вопросы дискретизации аналоговых сигналов;
- различные виды преобразования Фурье в системах с дискретным временем;
- дискретное по времени преобразования Фурье (ДВПФ);
- дискретный по времени ряда Фурье (ДВРФ);
- дискретное преобразования Фурье (ДПФ).

Таким образом, будет представлен математический аппарат, необходимый для описания цифровых сигналов и систем. На каждой лекции 6-го семестра будут предлагаться задачи для самостоятельного решения. Намечается проведение **внезапных** курсовых письменных работ.

Дифференцированный зачет по курсу «Дискретные преобразования сигналов» (оценка идет в диплом) выставляется

- по результатам курсовых письменных работ (2-3 за семестр);
- по результатам самостоятельного решения задач, задаваемых в конце каждой лекции (в итоге около 30 задач).

**Каждая лекция по курсу «Дискретные преобразования сигналов» после прочтения выставляется на сайте кафедры**

<http://kprf.mipt.ru/index.php/uchebnye-kursy2/diskretnye-preobrazovaniya-signalov>

## Глава 1. Предварительные сведения из теории сигналов

### 1.1. Классификация сигналов

Под сигналом обычно понимают величину, отражающую состояние физической системы. Поэтому естественно рассматривать сигналы как функции, заданные в физических координатах. Примером могут служить одномерные сигналы, заданные как функции времени  $x(t)$ , двумерные сигналы  $I(x, y)$ , заданные на плоскости, и т. д.

В дальнейшем мы будем рассматривать в основном сигналы как действительные функции времени  $x(t)$ .

**Аналоговые** или **континуальные** сигналы описываются непрерывными и кусочно-непрерывными функциями  $x(t)$ , причем как сама функция, так и ее аргумент могут принимать любые значения в пределах некоторого интервала (рис. 1.1.1).

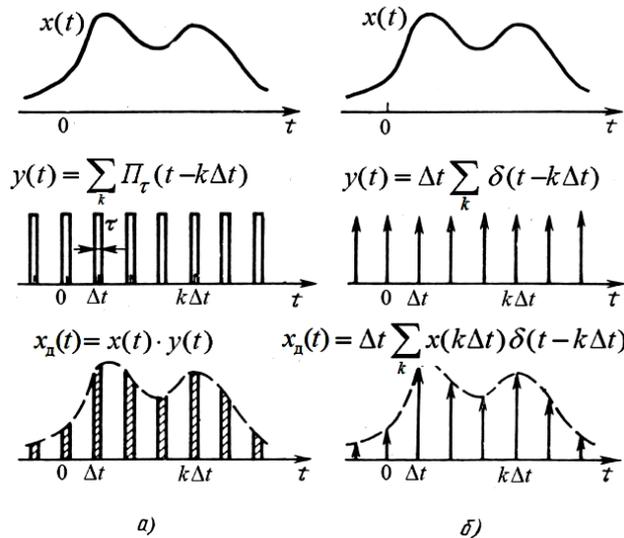


Рис. 1.1.1

**Дискретные** сигналы  $x_n(t)$  образуются путём умножения аналогового сигнала  $x(t)$  на так называемую функцию дискретизации  $y(t)$ , представляющую собой периодическую последовательность коротких импульсов, следующих с шагом дискретизации  $\Delta t$  (рис. 1.1.1а). В идеальном случае в качестве функции дискретизации используется периодическая последовательность дельта-функций (рис. 1.1.1б).

**Цифровой** сигнал  $x_n(k)$  описывается квантованной решетчатой функцией (рис. 1.1.2), т. е. решетчатой функцией, принимающей лишь ряд дискретных уровней квантования  $mq$ , где  $q$  – шаг квантования по уровню, а  $m$  – номер интервала квантования,  $m=0, 1, 2, \dots, M-1$ . Обычно  $M=2^n$ ,  $n$  – целое положительное число.

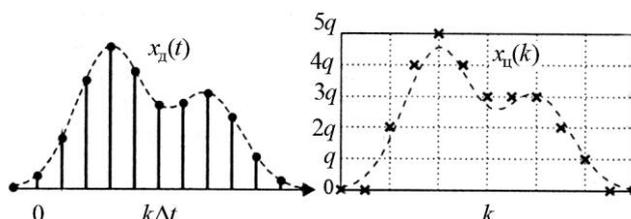


Рис. 1.1.2

Цифровой сигнал представляется последовательностями чисел, имеющих ограниченное количество разрядов.

Большинство информационных сигналов, получаемых от различных датчиков являются по своей форме *аналоговыми*, что означает непрерывное изменение во времени физических величин, например, напряжения, тока и т. д. В системах *цифровой обработки сигналов* (ЦОС), цифровые сигналы обычно получаются из аналоговых, дискретизованных через равные интервалы времени и преобразованных в цифровой вид. Основные преимущества ЦОС:

- *Гарантированная точность.* Точность определяется только числом задействованных битов в представлении сигналов и характеристик систем.
- *Совершенная воспроизводимость.* Цифровые записи можно копировать или воспроизводить многократно без ухудшения качества сигнала.
- *Большая гибкость.* Системы ЦОС можно запрограммировать и перепрограммировать на выполнение различных функций без изменения оборудования. Это важнейшая особенность ЦОС.
- *Превосходная производительность.*
- *Практически отсутствует зависимость характеристик от температуры и старения.*

Для преобразования аналогового сигнала в цифровую форму в системах цифровой обработки сигналов используется аналого-цифровой преобразователь (АЦП). АЦП формирует цифровые отсчеты сигналов, т.е. выполняет дискретизацию сигналов по времени и квантование отсчетов по уровню.

Рассмотрим одну из важнейших характеристик АЦП.

### Шум квантования n-разрядного АЦП

Передаточная функция идеального АЦП имеет вид

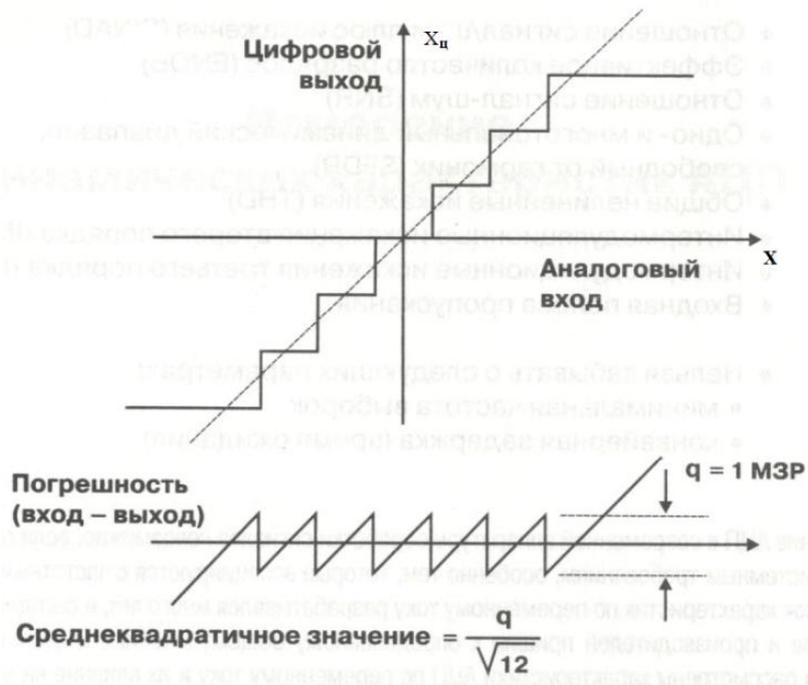


Рис. 1.1.3. Шум квантования как функция времени

Погрешность квантования обозначим через  $e = x - x_{ц}$ . Как видно из графика передаточной функции максимальная погрешность при преобразовании сигнала равна  $(\pm 1/2)$  МЗР (МЗР-младший

значащий разряд). Погрешность квантования сигнала с размахом, большим нескольких МЗР, можно аппроксимировать некоррелированной пилообразной ломанной с амплитудой от пика до пика, равной  $q$  – весу МЗР.

Пилообразная погрешность

$$e(t) = st, \quad -\frac{q}{2} < st < \frac{q}{2}$$

Из графика видно, что фактическая погрешность квантования с равной вероятностью может появиться в любой точке диапазона  $(\pm 1/2)q$ . Ниже показано, что действующее значение этой пилы равно  $\frac{q}{2\sqrt{3}}$ .

Пилообразная погрешность создаёт гармоники, лежащие дальше полосы  $[0, f_d / 2]$  - первой полосы Найквиста. Однако все высшие гармоники должны переноситься (эффект дискретизации) в эту полосу и, затем суммируясь, произвести шум с действующим значением  $\frac{q}{2\sqrt{3}}$ . Шум квантования не коррелирован с входным сигналом и имеет равномерное распределение в пределах шага квантования

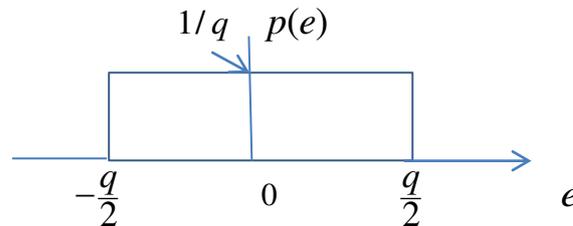


Рис. 1.1.4. Плотность вероятности ошибки квантования

Из рис. 1.1.4 видно, что ошибка квантования имеет среднее значение

$$M[e] = \int_{-q/2}^{q/2} ep(e)de = 0$$

и дисперсию  $\sigma_e^2 = M[e - M[e]]^2 = M[e^2] = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 p(e)de = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} e^2 de = \frac{q^2}{12}$ .

Среднеквадратичное значение шума квантования

$$\sigma_e = \frac{q}{2\sqrt{3}}. \quad (1.1.1)$$

Пусть на входе АЦП с диапазоном напряжения входного сигнала

$$V_{in} = \left[ -\frac{q \cdot 2^n}{2}, \frac{q \cdot 2^n}{2} \right]$$

действует полномасштабная синусоида

$$x(t) = \frac{q \cdot 2^n}{2} \sin 2\pi ft.$$

Среднеквадратичное значение входного сигнала

$$\sigma_x = \frac{q \cdot 2^n}{2\sqrt{2}}.$$

Получаем отношение «сигнал/шум» (Signal to Noise Ratio)

$$SNR = 20 \lg \left[ \frac{q \cdot 2^n / 2\sqrt{2}}{q / 2\sqrt{3}} \right] = 20 \lg 2^n + 20 \lg \sqrt{2/3} = [6,02n + 1,76] \text{ дБ.}$$

Относительный уровень шума квантования

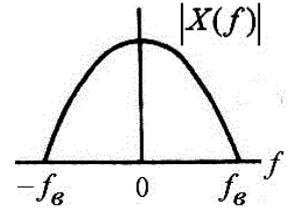
$$\gamma = 20 \lg \left[ \frac{q / 2\sqrt{3}}{q \cdot 2^n / 2\sqrt{2}} \right] = 20 \lg \frac{1}{2^n \sqrt{1,5}} = -20 \lg(2^n \sqrt{1,5}) = -[6,02n + 1,76] \text{ дБ.} \quad (1.1.2)$$

Так например, для восьмиразрядного АЦП относительный уровень шума квантования в дБ будет

$$\gamma = -[6,02n + 1,76] \text{ дБ} \approx -50 \text{ дБ.}$$

**Финитный** сигнал характеризуется тем, что отличен от нуля лишь на конечном интервале  $T$ .

**Сигналы с финитным спектром.** У таких сигналов спектральная функция (преобразование Фурье)  $X(f)$  существует на всём интервале частот  $(-\infty, \infty)$ , но отлично от нуля только на конечном интервале  $[-f_c, f_c]$  (рис. 1.1.5).



**Низкочастотные сигналы** имеют спектр, расположенный в начале координат (рис. 1.1.5)

**Узкополосный радиосигнал** это сигнал со спектром вида (рис. 1.1.6)

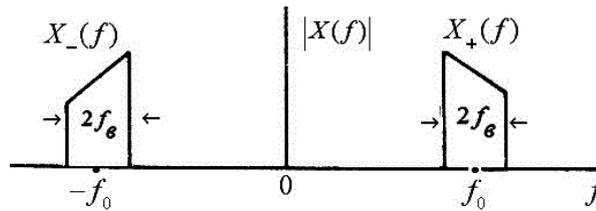


Рис. 1.1.6

Примером является сигнал с амплитудной и фазовой модуляцией

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)], \quad (1.1.3)$$

где  $A(t)$  и  $\varphi(t)$  – медленно меняющиеся по сравнению с циклическим множителем функции времени. Это наиболее общая форма записи узкополосного колебания. Гармонический сигнал (косинусоида с постоянной частотой  $f_0$  и начальной фазой  $\varphi_0$ ) подвергается одновременно амплитудной и фазовой модуляции. Такой сигнал при условии  $f_0 \gg 2f_c$  можно считать квазигармоническим – его амплитуда и фаза медленно изменяются во времени по сравнению с несущим колебанием  $\cos 2\pi f_0 t$ .

**Комплексное представление** действительных колебаний.

Комплексное представление полосовых сигналов является прямым развитием известного символического метода, позволяющего представлять гармоническое колебание как действительную или мнимую часть комплексной функции:

$$A \cos[\omega_0 t + \varphi_0] = \text{Re}(Ae^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t}),$$

$$A \sin[\omega_0 t + \varphi_0] = \text{Im}(Ae^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t}).$$

Величину  $Ae^{j\varphi_0}$  называют комплексной амплитудой гармонического колебания. При  $\varphi_0 = 0$

$$x(t) = \text{Re}(Ae^{j2\pi f_0 t}) = \frac{A}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}). \quad (1.1.4)$$

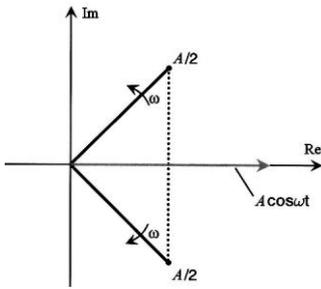


Рис.1.1.7

Его можно представить в виде суммы двух векторов, вращающихся в разные стороны с угловыми скоростями  $\omega$  и  $-\omega$  как показано на рис.1.1.7. Проекции этих векторов на действительную ось складываются, а на мнимую – вычитаются, компенсируя друг друга. Таким образом, для действительного сигнала обязательно наличие как *прямого спектра*  $X_+(\omega) = X(\omega)$  для  $\omega > 0$ , так и *инверсного*  $X_-(\omega) = X^*(-\omega)$ , для  $\omega < 0$ .

Таким образом, полосовой радиосигнал представляет собой сложное колебание, получающееся из гармонического сигнала с частотой  $f_0$  при одновременной его модуляции как по амплитуде, так и по фазе. Мы попытаемся корректно распространить символический метод на такие колебания. Для этого (1.1.3) представим в виде

$$x(t) = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t. \quad (1.1.5)$$

Здесь

$$x_c(t) = A(t) \cos \varphi(t) \text{ и } x_s(t) = A(t) \sin \varphi(t) \quad (1.1.6)$$

называются *квадратурными составляющими* узкополосного колебания  $x(t)$ , соответственно  $x_c(t)$  – синфазная, а  $x_s(t)$  – квадратурная компоненты. Квадратурные составляющие являются низкочастотными действительными функциями и несут всю информацию о модуляции сигнала. Спектры этих функций сконцентрированы возле начала координат в полосе  $2f_0$ .

Амплитудную и фазовую модуляции сигнала  $x(t)$  можно определить с помощью квадратурных компонент. Из (1.1.6) имеем

$$A(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}, \quad (1.1.7)$$

$$\varphi(t) = \arctg \frac{x_s(t)}{x_c(t)}.$$

Ветвь арктангенса выбирается таким образом, чтобы  $\varphi(t)$  была непрерывной функцией времени.

Введём *комплексную огибающую*

$$\gamma(t) = x_c(t) + jx_s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}. \quad (1.1.8)$$

Эта функция содержит всю обусловленную модуляцией информацию. При этом физическая огибающая равна

$$A(t) = |\gamma(t)|.$$

Полная фаза узкополосного колебания

$$\psi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(t),$$

а мгновенная частота определяется как производная по времени от полной фазы:

$$f(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arctg \frac{x_s}{x_c} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{x'_s x_c - x'_c x_s}{x_c^2 + x_s^2}.$$

Комплексную огибающую можно представить на комплексной плоскости вектором, который совершает некоторое сложное движение, изменяясь как по модулю, так и по направлению (рис. 1.1.8). Исходный действительный сигнал  $x(t)$  связан с комплексной огибающей  $\gamma(t)$  соотношением

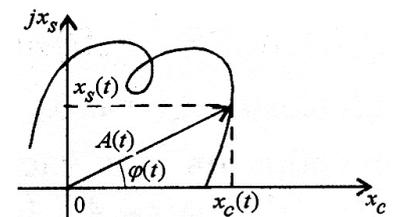


Рис. 1.1.8

$$x(t) = \operatorname{Re}[\gamma(t) e^{j2\pi f_0 t}]. \quad (1.1.9)$$

Таким образом, понятие комплексной огибающей обобщает понятие комплексной амплитуды на случай узкополосных радиосигналов. Представление ((1.1.9)) широко распространено в практике обработки полосовых радиосигналов.

**Случайный процесс**  $X(t)$  представляет собой ансамбль (в общем случае бесконечномерный) выборочных функций времени, подчиняющихся некоторой общей статистической закономерности. Каждая из функций этого ансамбля называется *реализацией* случайного процесса (рис. 1.1.9).

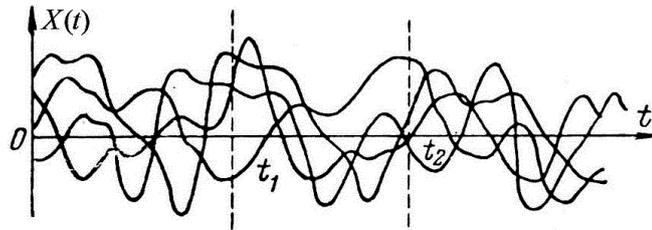


Рис. 1.1.9

Случайный сигнал можно рассматривать как функцию двух аргументов:

$$x(a, t), \quad a \in \Omega, \quad t \in T.$$

Первый аргумент  $a$  является элементарным событием и принадлежит пространству  $\Omega$  элементарных событий с заданной на нем вероятностной мерой. Это так называемое *выборочное пространство*. Вторым аргументом  $t$  имеет обычно смысл времени и принадлежит множеству  $T$ . Аргумент  $t$  может быть непрерывным или дискретным. В соответствии с этим  $x(a, t)$  – непрерывный или дискретный сигнал. В обоих случаях  $T$  может быть конечным или бесконечным. Функция, происходящая из  $\Omega$ , обозначается как  $x(a, t)$ , однако проще обозначать её как  $x(t)$ , имея всегда ввиду то, что конкретной реализации  $x(t)$  соответствует точка в выборочном пространстве  $\Omega$ .

В пространстве функций времени (гильбертовом пространстве  $L_2$ ) отдельная реализация  $x(t)$  есть вектор.

Неслучайные сигналы называются *детерминированными* и описываются известными функциями, заданными на конечных или бесконечных интервалах.

**Каузальный** сигнал  $x(t)$  характеризуется тем, что  $x(t) = 0$  при  $t < 0$ . Все импульсные характеристики реализуемых фильтров являются каузальными.

Пункт 1,2 носит напоминательный характер и очень важен для понимания различных дискретных преобразований.

## 1.2. Пространства сигналов

### Метрические пространства

Сигналы, обладающие некоторым общим свойством, можно объединить в одно множество. Примером является множество периодических сигналов, множество сигналов с финитным спектром и т. д. Определив множество, мы начинаем интересоваться отличительными свойствами элементов этого множества. Общий подход заключается в том, что каждой паре элементов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  ставится в соответствие *действительное положительное число (метрику)*  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , которое трактуется как *расстояние* между элементами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ .

Множество, в котором определено расстояние, представляет собой *метрическое пространство* сигналов. При этом сигналы удобно рассматривать как векторы в этом пространстве. Функционал  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  отображает каждую пару элементов на действительную ось и обладает следующими свойствами:

- а)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$  и  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , если только  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ;  
 б)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  (симметрия);  
 в)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  (неравенство треугольника).

Две разные метрики, определённые на одном и том же множестве, порождают разные метрические пространства. Приведём примеры часто используемых метрик.

Для аналоговых сигналов, заданных на интервале  $[0, T]$ ,

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^T |x(t) - y(t)| dt; \quad (1.2.1)$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\int_0^T |x(t) - y(t)|^2 dt} \geq 0; \quad (1.2.2)$$

$$d_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{[0, T]} |x(t) - y(t)|. \quad (1.2.3)$$

Для дискретных сигналов, заданных на интервале  $N$ ,

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{N-1} |x(k) - y(k)|; \quad (1.2.4)$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |x(k) - y(k)|^2}; \quad (1.2.5)$$

$$d_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_k |x(k) - y(k)|. \quad (1.2.6)$$

В пространстве  $n$ -разрядных двоичных сигналов расстояние между любой парой таких сигналов

$$\mathbf{x} = (x_{n-1} \dots x_1 x_0) \text{ и } \mathbf{y} = (y_{n-1} \dots y_0 y_1)$$

вполне будет определяться числом несовпадающих символов:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{n-1} [x_i \oplus y_i], \quad (1.2.7)$$

где  $\oplus$  означает сложение по модулю 2:  $1+0=0+1=1$ ,  $0+0=1+1=0$  без переноса в старший разряд. Метрика определяет *расстояние по Хеммингу* для двоичных слов.

### Линейные пространства

Метрическое пространство является *линейным*, если в нём определены операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр, в результате которых образуется новый вектор в том же пространстве. Эти операции должны удовлетворять известным аксиомам.

Важным является понятие линейно независимых векторов  $\Phi_n$ .

Векторы  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$  называются линейно независимыми, если равенство

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \Phi_n = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда все  $\alpha_n = 0$ . Путем линейных комбинаций таких  $N$  линейно независимых векторов можно образовать векторное пространство  $S$ , где каждый вектор  $\mathbf{x}$  соответствует единственной линейной комбинации векторов  $\Phi_n$ :

$$\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \Phi_n. \quad (1.2.8)$$

Пространство  $S$  называется  *$N$ -мерным векторным линейным* пространством. Множество линейно независимых векторов  $\{\Phi_n\}$  называется базисом для  $S$ . Говорят, что пространство  $S$  *натянута* на этом базисе. Со-

вокупность  $N$  чисел  $\{\alpha_n\}$  называется *координатами* или *спектром* вектора  $\mathbf{x}$  в этом базисе. Координаты вектора в общем случае могут быть комплексными.

### Гильбертово пространство

Это пространство определяют следующим образом.

1. Задано линейное пространство  $H$ .

2. Для каждой пары  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  сигналов из  $H$  вводится линейная операция  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , называемая *скалярным произведением* двух векторов, в результате которой образуется скаляр, а не вектор. Эта операция должна удовлетворять аксиомам:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{y}, \mathbf{x})^*; \\(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}); \\(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \text{ но } (\mathbf{x}, \alpha \mathbf{y}) = \alpha^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \\(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &\geq 0,\end{aligned}\tag{1.2.9}$$

причём действительное число  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{x} = 0$ . Здесь и далее звездочка означает комплексное сопряжение.

*Норма* или *длина вектора* определяется как

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \geq 0.\tag{1.2.10}$$

Векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. если  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ .

Отметим два важных неравенства:

*неравенство Коши–Буняковского*

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|\tag{1.2.11}$$

*и неравенство Шварца*

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}).\tag{1.2.12}$$

3. В  $H$  существует счётное число линейно независимых векторов, которые можно ортогонализировать, пользуясь известной процедурой Грамма–Шмидта. Поэтому в гильбертовом пространстве существует счётная ортогональная система векторов  $\{\Phi_n\}$ , образующих *ортогональный базис*. Для *полных* ортогональных систем (см. далее) любой вектор  $\mathbf{x} \in H$  может быть представлен в виде

$$\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n,\tag{1.2.13}$$

где

$$c_n = \frac{(\mathbf{x}, \Phi_n)}{\|\Phi_n\|^2},\tag{1.2.14}$$

$$(\Phi_m, \Phi_n) = \begin{cases} \|\Phi_n\|^2, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}\tag{1.2.15}$$

Для полного ортонормированного базиса

$$\|\Phi_n\| = \sqrt{(\Phi_n, \Phi_n)} = 1,\tag{1.2.16}$$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2, \quad (1.2.17)$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2}. \quad (1.2.18)$$

Квадрат нормы (1.2.17) называется *энергией сигнала*. Ряд (1.2.13) называется *рядом Фурье* по базису  $\{\Phi_n\}$ , а коэффициенты  $c_n$  – *коэффициентами Фурье* сигнального вектора  $\mathbf{x}$  в этом базисе. Соотношение (1.2.18) известно как *условие полноты*.

Аналогично для любых двух векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , имеющих в ортонормированном базисе  $\{\Phi_n\}$  спектры  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  соответственно, справедливо равенство

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n, \sum_{m=0}^{\infty} b_m \Phi_m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n^*. \quad (1.2.19)$$

При переходе к другому ортонормированному базису координаты  $a_n$  и  $b_n$  изменятся (станут  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  соответственно), однако скалярное произведение останется без изменения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n^* = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n^*. \quad (1.2.20)$$

Это соотношение называется *равенством Парсеваля*.

За расстояние между векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  в гильбертовом пространстве принимается длина разностного вектора:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n|^2}. \quad (1.2.21)$$

Сигналы, принадлежащие гильбертову пространству, изображаются точками и векторами, идущими из начала координат в данную точку. Их можно складывать и умножать на числа. Можно рассматривать длину вектора, представляющего сигнал, как его норму, измерять расстояние между сигналами.

## Примеры пространств сигналов

### Пространство $L_2$

Элементами метрического пространства являются в общем случае комплексные функции  $x(t)$ , заданные на интервале  $T$ , конечном или бесконечном. Будем считать, что функции  $x(t)$  являются функциями с интегрируемым квадратом

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Этот интеграл обычно трактуется как энергия сигнала, если принять, что  $x(t)$  – это ток или напряжение на сопротивлении 1 Ом.

При этом  $L_2$  является пространством с ограниченной энергией. Все физические сигналы имеют конечную энергию.

В  $L_2$  скалярное произведение, норма и расстояние определяются соответственно

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_T x(t) y^*(t) dt, \quad (1.2.22)$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\int_T |x(t)|^2 dt}, \quad (1.2.23)$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\int_T |x(t) - y(t)|^2 dt}. \quad (1.2.24)$$

Метрика  $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  называется среднеквадратичной метрикой и определяет среднеквадратичное отклонение сигнала  $y(t)$  от  $x(t)$ .

Условие ортогональности двух векторов  $\varphi_m$  и  $\varphi_n$  в  $\mathbf{L}_2$  записывается в виде

$$\int_T \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|\varphi_n\|^2 = \int_T |\varphi_n(t)|^2 dt, & m = n. \end{cases} \quad (1.2.25)$$

Обобщенный ряд Фурье (1.2.13) в  $\mathbf{L}_2$  принимает вид

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t), \quad (1.2.26)$$

где

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_T x(t) \varphi_n^*(t) dt \quad (1.2.27)$$

есть коэффициенты Фурье по системе  $\{\varphi_n\}$ .

### Пространство $\mathbf{I}_2$

Элементами множества  $S$  являются последовательности чисел (в общем случае комплексные)  $\mathbf{x} = [x(0), x(1), x(2), \dots, x(k), \dots]$ , удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty. \quad (1.2.28)$$

Такие последовательности называют также счётномерными векторами. В данном классе последовательностей вводят операции сложения векторов и умножения их на скаляр:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= [x(0) + y(0), x(1) + y(1), \dots, x(k) + y(k), \dots], \\ \alpha \mathbf{x} &= [\alpha x(0), \alpha x(1), \dots, \alpha x(k), \dots]. \end{aligned}$$

Скалярное произведение, норма и расстояние определяются соответственно

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) y^*(k), \quad (1.2.29)$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^2}, \quad (1.2.30)$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |x(k) - y(k)|^2}. \quad (1.2.31)$$

Эти соотношения определяют пространство  $\mathbf{I}_2$ , которое можно рассматривать как координатную реализацию гильбертова пространства  $\mathbf{L}_2$ .

Обратимся к формулам обобщенного ряда Фурье (1.2.13) – (1.2.18). Эти формулы устанавливают взаимно однозначное соответствие (*изоморфизм*) между сигналом и совокупностью его коэффициентов Фурье. Сигнал  $x(t)$  является элементом пространства  $\mathbf{L}_2$ , а совокупность коэффициентов Фурье (счётномерный вектор)  $\{c_n\}$  – элементом пространства  $\mathbf{I}_2$ . Между пространствами  $\mathbf{L}_2$  и  $\mathbf{I}_2$  устанавливается изометрия, при которой сохраняется норма элементов пространств  $\mathbf{L}_2$  и  $\mathbf{I}_2$  (1.2.18).

### Пространство $\mathbf{I}_2^N$

Ограничение размерности векторов до  $N$  координат  $\mathbf{x} = [x(0), x(1), x(2), \dots, x(k), \dots, x(N-1)]$  приводит к пространству  $\mathbf{I}_2^N$ , которое является подпространством комплексного гильбертова пространства  $\mathbf{I}_2$ . Характерно, что в  $\mathbf{I}_2^N$  существуют  $N$  линейно независимых векторов  $\Psi_n$ . Эти  $N$  векторов называют базисом  $N$ -мерного пространства.

Обобщенный ряд Фурье в пространстве  $\mathbf{I}_2^N$  с ортогональным базисом  $\{\Psi_n\}$  принимает вид

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \Psi_n(k), \quad (1.2.32)$$

где

$$c_n = \frac{1}{\|\Psi_n\|^2} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \Psi_n^*(k), \quad (1.2.33)$$

$$(\Psi_n, \Psi_m) = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_n(k) \Psi_m^*(k) = \begin{cases} \|\Psi_n\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |\Psi_n(k)|^2, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (1.2.34)$$

#### Задачи для самостоятельного решения. Лекция 5 февраля 2019 г.

1. Используя неравенство Коши–Буняковского  $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , доказать, что среднее значение действительной  $T$ -периодической функции всегда меньше или равно её среднеквадратическому значению:

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \leq \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}.$$

2. Показать, что для любых двух векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , имеющих в ортонормированном базисе  $\{\Phi_n\}$  спектры  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  соответственно, длина разностного вектора определяется соотношением

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n|^2}.$$

3. Выразить спектр комплексной огибающей полосового радиосигнала через его спектр.