

Глава 3. Преобразования Фурье с дискретным временем

3.1. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ)

Как уже отмечалось, спектр последовательности отсчетов $x(k\Delta t)$, $k=0, 1, 2, \dots$, представляет собой периодическое (с периодом $f_d = 1/\Delta t$) повторение исходного спектра $X(f)$.

$$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m f_d) \quad (3.1.1)$$

Будем считать, что все условия теоремы Котельникова выполнены и разmultiplication спектра, вызванное дискретизацией, происходит без наложения.

Периодическую функцию (3.1.1) представим в виде ряда Фурье (по частоте)

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{-jk(2\pi/f_d)f} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{-j2\pi f k \Delta t}, \quad (3.1.2)$$

где коэффициенты Фурье равны

$$c_{-k} = (1/f_d) \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df = \Delta t x(k \Delta t). \quad (3.1.3)$$

Подставляя эти коэффициенты в (3.1.2), получим

$$X_d(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t}. \quad (3.1.4)$$

Это есть *прямое дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ)* последовательности $x(k)$. *Обратное ДВПФ* в соответствии с (2.3) будет

$$x(k \Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df. \quad (3.1.5)$$

Выражения (3.1.4) и (3.1.5) определяют пару *дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ)*. Прямое ДВПФ $X_d(f)$ – *континуальная и периодическая функция частоты* (с периодом f_d):

$$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m f_d).$$

В выражениях (3.1.4) и (3.1.5) удобно принять $\Delta t = 1$ и ввести нормированные частоты $\nu = f / f_d$ (доли частоты дискретизации). Тогда будем иметь соответственно

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi \nu k}, \quad (3.1.6)$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi \nu k} d\nu. \quad (3.1.7)$$

Пару ДВПФ символически обозначим следующим образом:

$$x(k) \Leftrightarrow X(\nu).$$

Ещё раз подчеркнём, что прямое ДВПФ $X(\nu)$ представляет континуальную и периодическую функцию частоты (с периодом $\nu_d = 1$), а $x(k)$ – непериодическая последовательность.

Отметим ещё две часто используемые формы записи ДВПФ. Положив в (3.1.4) и (3.1.5) $2\pi f = \omega$, будем иметь

$$X_d(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \Delta t) e^{-j\omega k \Delta t}, \quad (3.1.8)$$

$$x(k \Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X_d(\omega) e^{j\omega k \Delta t} d\omega. \quad (3.1.9)$$

Здесь $\omega_d = 2\pi / \Delta t$ – частота дискретизации в рад/сек. В этих выражениях удобно принять $\theta = \omega \Delta t = 2\pi \omega / \omega_d$ и $\Delta t = 1$. Тогда приходим к ещё одной форме записи пары ДВПФ:

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k}, \quad (3.1.10)$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) e^{j\theta k} d\theta. \quad (3.1.11)$$

Прямое ДВПФ $X(\theta)$ – непрерывная, периодическая функция частоты (с периодом 2π), а $x(k)$ – непериодическая последовательность.

Основные свойства и теоремы ДВПФ

В приложениях и алгоритмах, основанных на вычислении преобразования Фурье, в идеале требуется именно дискретное по времени преобразование Фурье (ДВПФ). Однако в цифровых системах обработки сигналов требуется конечное число отсчётов и по времени, и по частоте. Адекватным этому требованию является дискретное преобразование Фурье (ДПФ), которое, как мы убедимся далее, представляет собой масштабированные отсчёты ДВПФ, вычисленные на определённых частотах. ДПФ играет центральную роль в реализации большого числа алгоритмов цифровой обработки сигналов, в том числе цифрового спектрального анализа. Это обеспечивается эффективными методами вычисления ДПФ, которые подробно рассматриваются в п. 12. Вот почему связка ДВПФ и ДПФ важна для понимания сути Фурье-анализа сигналов. По этой же причине для нас важны свойства и особенности ДВПФ.

Сходимость ДВПФ

Рассмотрим пару ДВПФ (3.1.10) и (3.1.11). Мы пока еще не доказали, что эти формулы взаимно обратимы. Подставим (3.1.10) в правую часть (3.1.11), тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\theta m} \right) e^{j\theta k} d\theta = \hat{x}(k). \quad (3.1.12)$$

Нам нужно показать, что $\hat{x}(k) = x(k)$, если $X(\theta)$ определена формулой (3.1.10). Если бесконечный ряд под интегралом в (3.1.12) равномерно сходится на множестве определения θ , то его можно почленно проинтегрировать, т. е.

$$\hat{x}(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\theta(k-m)} d\theta \right).$$

Интеграл в круглых скобках равен

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\theta(k-m)} d\theta = \frac{\sin \pi(k-m)}{\pi(k-m)} = \mathbf{1}(k-m) = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \quad (3.1.13)$$

Это определение единичного импульса, тестового сигнала в системах с дискретным временем. Реакция линейной дискретной системы (ЛДС) на единичный импульс есть импульсная характеристика системы $h(k)$, (при нулевых начальных условиях).

Таким образом,

$$\hat{x}(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \mathbf{1}(k-m) = x(k), \quad \text{ч. т. д.}$$

Вопрос о представимости сигнала формулой (3.1.11) равносильен вопросу о сходимости ряда (3.1.10). Выясним теперь условия, при которых ряд (3.1.10) сходится, т. е.

$$|X(\theta)| < \infty,$$

где $X(\theta)$ – предел при $N \rightarrow \infty$ частичных сумм

$$X(\theta, N) = \sum_{k=-N}^N x(k) e^{-j\theta k}.$$

Достаточное условие сходимости определяется следующим образом:

$$|X(\theta)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| |e^{-j\theta k}| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| < \infty.$$

Таким образом, для абсолютно суммируемой последовательности $x(k)$ ДВПФ $X(\theta)$ определено на всей числовой прямой. Более того, можно показать, что по признаку Вейерштрасса ряд (3.1.10) равномерно сходится к непрерывной функции от θ . Итак, абсолютная суммируемость последовательности $x(k)$ является достаточным условием существования ДВПФ. Это условие гарантирует также равномерную сходимость. Ясно, что любая последовательность конечной длины абсолютно суммируема и для неё можно найти ДВПФ. Поэтому системы с конечной импульсной характеристикой $h(k)$ (например, КИХ-фильтры) в силу её абсолютной суммируемости имеют непрерывную частотную характеристику

$$H(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-j\theta k}$$

и всегда устойчивы. Система устойчива, если её реакция на любой ограниченный по амплитуде сигнал ограничена (при конечных начальных условиях). Необходимым и достаточным условием устойчивости является абсолютная суммируемость импульсной характеристики. Приведём несколько примеров.

Пример 3.1.1. Пусть $x(k) = a^k \sigma(k)$, где $\sigma(k)$ – дискретная функция включения. ДВПФ этой последовательности

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-j\theta k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a e^{-j\theta})^k = \frac{1}{1 - a e^{-j\theta}},$$

если $|a| < 1$. Это неравенство является также критерием абсолютной суммируемости последовательности $x(k)$, т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1 - |a|} < \infty, \quad \text{если только } |a| < 1.$$

Некоторые последовательности не являются абсолютно суммируемыми, но обладают конечной энергией:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty.$$

Такие *последовательности с суммируемым квадратом* могут быть представлены в виде

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) e^{j\theta k} d\theta,$$

если мы откажемся от равномерной сходимости ряда

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k}.$$

В этом случае мы имеем сходимость в среднеквадратичном, т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X(\theta) - \sum_{k=-N}^N x(k) e^{-j\theta k} \right|^2 d\theta = 0.$$

Пример 3.1.2. Определим импульсную характеристику $h_0(k)$ идеального фильтра нижних частот (ИФНЧ). Его частотная характеристика, равная на промежутке $[-\pi, \pi]$

$$H_0(\theta) = \begin{cases} 1, & |\theta| < \theta_c, \\ 0, & \theta_c < |\theta| \leq \pi, \end{cases}$$

является периодической с периодом 2π .

Импульсная характеристика находится с помощью обратного ДВПФ:

$$h_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_c}^{\theta_c} e^{j\theta k} d\theta = \frac{1}{j2\pi k} (e^{j\theta_c k} - e^{-j\theta_c k}) = \frac{\sin \theta_c k}{\pi k}, \quad -\infty < k < \infty. \quad (3.1.14)$$

Поскольку импульсная характеристика некаузальная, т. е. $h_0(k) \neq 0$ при $k < 0$, ИФНЧ нереализуем. Кроме того, последовательность $h_0(k)$ не является абсолютно суммируемой. Члены последовательности хоть и стремятся к нулю при неограниченном возрастании k , но не быстрее чем $1/k$. Это происходит в результате разрыва функции $H_0(\theta)$ в точках $\theta = \pm\theta_c$. По этой причине ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta_c k}{\pi k} e^{-j\theta k}$$

сходится неравномерно на числовой оси. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть поведение усечённого ряда

$$H_0(\theta, N) = \sum_{k=-N}^N \frac{\sin \theta_c k}{\pi k} e^{-j\theta k}. \quad (3.1.15)$$

График функции $H_0(\theta, N)$ представлен на рис. 3.1.1 для двух значений N .

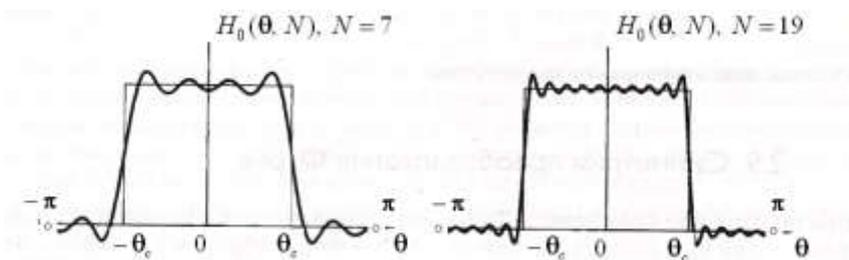


Рис. 3.1.1. Графики частичных сумм ДВПФ

Видно, что графики заметно пульсируют вблизи точек разрыва $H_0(\theta)$ (явление Гиббса), но амплитуда пульсаций не уменьшается с ростом N . Можно показать, что максимальная амплитуда пульсаций не

стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Пульсации сжимаются по горизонтали к вертикальному отрезку, проведённому через точку разрыва $\theta = \pm\theta_c$. Следовательно ряд (3.1.15) сходится к разрывной функции $H_0(\theta)$ неравномерно. Однако последовательность (3.1.14) суммируема с квадратом, соответственно $H_0(\theta, N)$ сходится к $H_0(\theta)$ в среднеквадратичном, т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H_0(\theta) - H_0(\theta, N)|^2 d\theta = 0.$$

При больших N функции $H_0(\theta, N)$ и $H_0(\theta)$ отличаются лишь в точках $\theta = \pm\theta_c$. Поведение частичных сумм ДВПФ имеет важное значение при разработке дискретных фильтров.

Некоторые свойства ДВПФ приведены в таблице 3.1.1.

Т а б л и ц а 3.1.1

	Последовательность $x(k)$	ДВПФ $X(v)$
1	$x(k-l)$	$X(v) \cdot \exp(-j2\pi vl)$
	(теорема запаздывания)	
2	$x(k) \exp(j2\pi v_0 k)$	$X(v - v_0)$
		(теорема смещения)
3	Свертка $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(l-k)$	Произведение $X(v)H(v)$
	(теорема о свертке)	
4	Произведение $x(k)y(k)$	Свертка (периодическая) $\int_{-1/2}^{1/2} X(v')Y(v-v')dv'$
5	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) ^2 = \int_{-1/2}^{1/2} X(v) ^2 dv$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y^*(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(v)Y^*(v)dv$ (равенство Парсеваля)	
6	Единичный импульс $\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$	1

7	Периодическая последовательность единичных импульсов $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m)$	Периодическая последовательность δ -функций (площади равны 1) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n)$
8	$\exp(j2\pi v_o k), -\infty < k < \infty$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-v_o-n)$
9	Последовательность единичных импульсов с периодом L $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-mL)$	Последовательность δ -функций с периодом $1/L$ (площади равны $1/L$) $(1/L) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n/L)$
10	Изменение масштаба $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(m) \mathbf{1}(k-mL)$	$X(vL)$
11	$kx(k)$ умножение на k	$\frac{j}{2\pi} \frac{dX(v)}{dv}$ дифференцирование по частоте

Все эти свойства легко доказываются непосредственным вычислением.

Упражнение 3.1.1. Докажем свойство 7. Найдем ДВПФ периодической последовательности единичных импульсов $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m)$.

Решение.

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \right] e^{-j2\pi vk} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) e^{-j2\pi vk}$$

С учетом теоремы запаздывания ДВПФ имеем

$$X(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi vm}$$

Это есть ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности δ -функций с периодом 1. Действительно

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m} e^{-j2\pi vm},$$

где коэффициенты Фурье

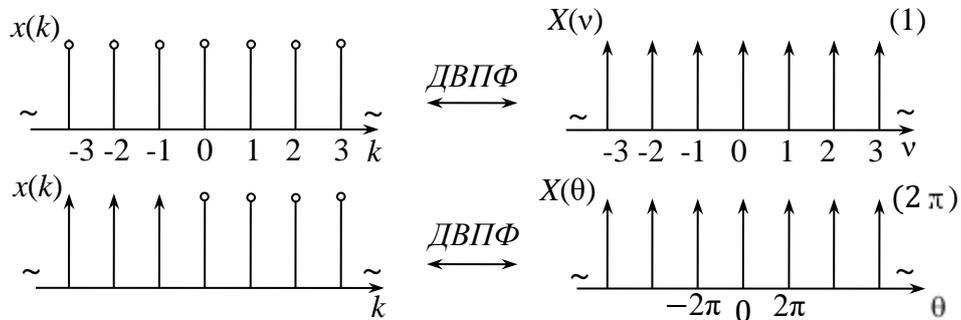
$$C_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(v) e^{j2\pi vm} dv \equiv 1.$$

Таким образом,

$$X(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi v m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n).$$

Для $\theta = \omega\Delta t = 2\pi f \Delta t = 2\pi v$

$$X(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\theta} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta-2\pi n).$$



Упражнение 3.1.2. Докажем, например, свойство 9. Обозначим

$$x(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \text{ и } x_1(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-mL).$$

Последовательность $x_1(k)$ получается, если между каждой парой отсчётов последовательности $x(k)$ вставить $L-1$ нулей (рис. 3.1.2).

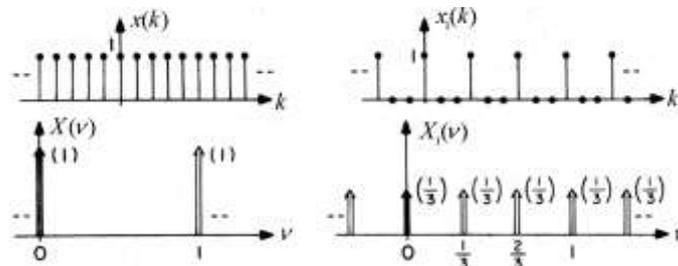


Рис. 3.1.2

Вычисление ДВПФ дает (с учётом теоремы запаздывания)

$$\begin{aligned} X_1(v) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-mL) e^{-j2\pi v k} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-mL) e^{-j2\pi v k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi v L m}. \end{aligned}$$

Это есть ряд Фурье (по оси v) периодической последовательности δ -функций с периодом $1/L$, т. е.

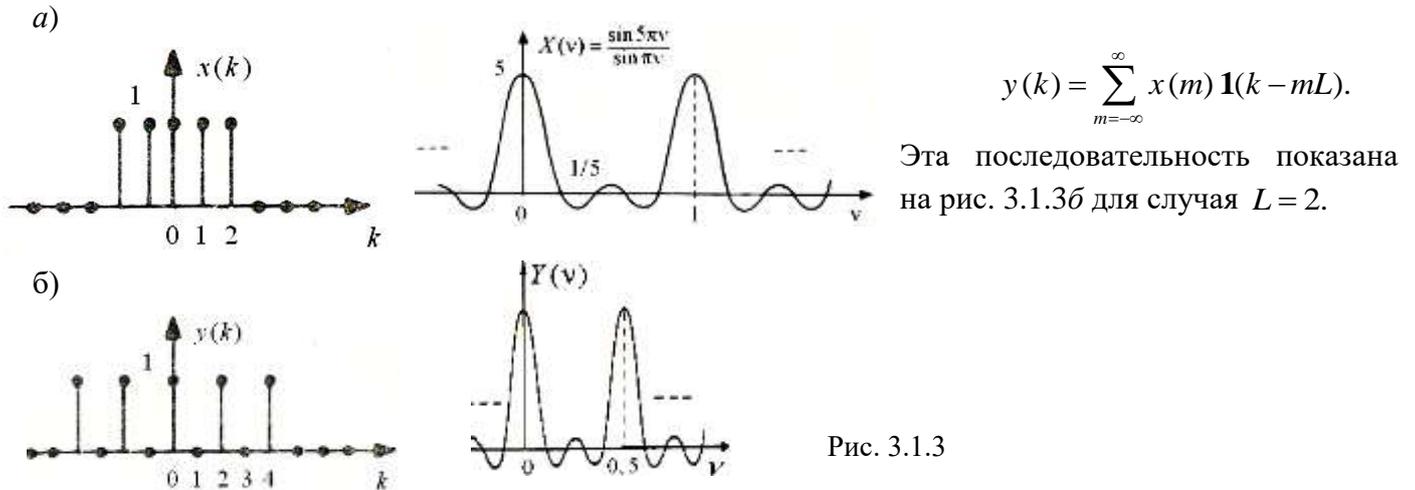
$$X_1(v) = (1/L) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n/L).$$

Для случая $L=3$ свойство 9 иллюстрируется на рис. 3.1.2.

Упражнение 3.1.3 Обсудим теперь свойство 10. В качестве примера рассмотрим последовательность $x(k)$ из пяти отсчётов одиночного прямоугольного импульса. ДВПФ этой последовательности

$$X(v) = \frac{\sin \pi N v}{\sin \pi v} = \frac{\sin 5\pi v}{\sin \pi v}.$$

Функция непрерывного аргумента $X(v)$ является периодической по оси v с периодом, равным 1 (рис. 3.1.3а). образуем новую последовательность $y(k)$ путем добавления $L-1$ нулей между каждой парой отсчетов $x(k)$:



Новая последовательность с измененным масштабом имеет ДВПФ

$$\begin{aligned}
 Y(v) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k) e^{-j2\pi vk} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \mathbf{1}(k - mL) e^{-j2\pi vk} = \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL) e^{-j2\pi vk} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j2\pi vmL} = X(vL).
 \end{aligned}$$

Функция $Y(v)$ периодична с периодом $1/L$ и сжата по оси v в L раз. Случай $L = 2$ изображен на рис. 3.1.3б.

Задачи к лекции 5 марта 2019 г.

1. Найти и изобразить по модулю ДВПФ для сигнала

$$x(k) = \begin{cases} A \sin\left(\frac{2\pi}{N} k\right), & 0 \leq k < N = 8, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

2. Определить обратное ДВПФ для следующих спектральных функций:

а) $X_1(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(v + k);$

б) $X_2(v) = 1 + 2 \sum_{k=0}^N \cos 2\pi vk;$

в) $X_3(v) = \frac{1 - e^{j2\pi v(N+1)}}{1 - e^{j2\pi v}};$

г) $X_4(v) = \frac{j\alpha e^{j2\pi v}}{(1 - \alpha e^{j2\pi v})^2}, |\alpha| < 1.$