

5.4. Алгоритм БПФ с основанием 4

Пусть N является степенью 4. Тогда можно записать

$$N = N/4 \cdot 4 \quad (N = N_1 \cdot N_2; \quad N_1 = N/4, \quad N_2 = 4).$$

Разобьем последовательность $x(k)$ на $N_2 = 4$ блока с номерами $k_2 = 0, 1, 2, 3$. Каждый из блоков будет содержать по $N_1 = N/4$ элементов с номерами $k_1 = 0, 1, 2, \dots, N/4 - 1$.

Если расположить блоки один под другим, получится двумерный массив входных данных (рис. 5.4.1)

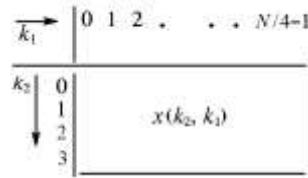


Рис. 5.4.1

При этом получается $N/4$ столбцов и 4 строки. Одномерный номер k выражается через переменные двумерного массива следующим образом:

$$k = (N/4) \cdot k_2 + k_1.$$

Можно найти ДПФ этого двумерного массива. Тогда результат также будет иметь вид двумерного массива (рис. 5.4.2) с переменными n_1 и n_2 : $n_1 = 0, 1, 2, \dots, N/4 - 1$, $n_2 = 0, 1, 2, 3$. При этом

$$n = 4n_1 + n_2,$$

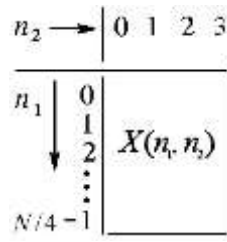


Рис. 5.4.2

поэтому

$$\begin{aligned} nk &= (4n_1 + n_2)[(N/4) \cdot k_2 + k_1] = \\ &= Nn_1 \cdot k_2 + 4n_1 \cdot k_1 + (N/4) \cdot n_2 \cdot k_2 + n_2 \cdot k_1. \end{aligned}$$

Подставив это в формулу для ДПФ, получаем

$$X(n) = X(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N/4-1} W_N^{4n_1 \cdot k_1} W_N^{n_2 \cdot k_1} \sum_{k_2=0}^3 x(k_2, k_1) W_N^{(N/4) \cdot n_2 \cdot k_2}.$$

Можно выделить следующие этапы вычислений:

1) вычисление 4-точечных ДПФ всех $N/4$ столбцов матрицы $[x(k_2, k_1)]$ с ядром $W_N^{N/4} = -j$:

$$Y(k_1, n_2) = \sum_{k_2=0}^3 x(k_2, k_1) W_N^{(N/4) \cdot n_2 \cdot k_2};$$

2) умножение на поворачивающие множители; в результате образуется новый массив

$$Z(k_1, n_2) = Y(k_1, n_2) W_N^{n_2 \cdot k_1};$$

3) вычисление $N/4$ -точечных ДПФ всех строк матрицы $[Z(k_1, n_2)]$ с ядром W_N^4 .

В свою очередь вычисление каждого из $N/4$ -точечных ДПФ можно разбить на рассмотренные этапы, используя представление $N/4 = (N/16) \cdot 4$ и т. д.

Процесс уменьшения размерности ДПФ продолжается до тех пор, пока не останутся 4-точечные ДПФ. В соответствии с этой процедурой изобразим для примера граф 16-точечного БПФ (рис. 3). В этом графе входные данные расположены в естественном порядке, а выходные – в разрядно-инверсном порядке четверичного представления номеров.

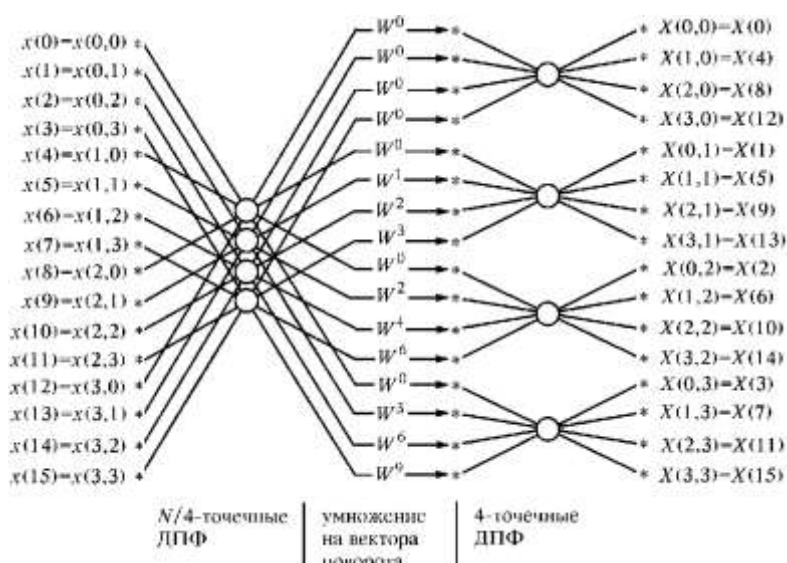


Рис. 5.4.3. Граф 16-точечного БПФ по основанию 4

В алгоритме с основанием 4 четырёхточечные ДПФ выполняются без умножений. При этом умножения на ± 1 и на $\pm j$ являются тривиальными и в расчет не принимаются.

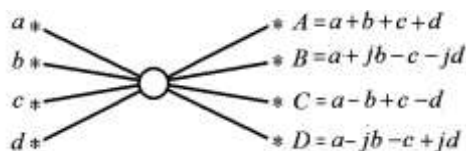


Рис. 5.4.4. Четырёхточечное ДПФ

Таким образом, все умножения в графе рис. 5.4.3 состоят только из умножений на поворачивающие множители на различных итерациях.

В алгоритме БПФ по основанию 4 на каждой итерации только четверть поворачивающих множителей тривиальные (в БПФ по основанию 2 – половина), однако число итераций равно $\log_4 N$ (т. е. вдвое меньше), поэтому общее число комплексных умножений будет

$$M = (3N / 4) \cdot \log_4 N,$$

что меньше, чем в БПФ по основанию 2. Количество комплексных сложений в алгоритмах БПФ по основанию 2 и 4 одинаково.

Можно построить алгоритмы БПФ по основанию 8, 16 и т. д., которые обеспечивают еще больший выигрыш в числе умножений.

5.5. Другие дискретные преобразования

ДПФ отображает действительную последовательность в комплексную область, что не всегда удобно. При обработке больших массивов данных, например изображений, наличие мнимой части коэффициентов ДПФ настолько усложняют вычисления, что исключается возможность применения ДПФ для целей сжатия таких массивов. Насколько это важная проблема поясним на примере.

Для образования одного кадра чёрно-белого изображения используют 625 строк, а на каждой строке 625 элементов (пикселей). Для воспроизведения движения приемлемого качества требуется формировать примерно 50 кадров в секунду. Скорость передачи при этом составляет

$$625 \cdot 625 \cdot 50 = 19\,031\,250 \text{ пикселей/с},$$

что соответствует полосе пропускания $2f_s = 20 \text{ МГц}$. Практически используется полоса 6 МГц. Для сжатия полосы используют чересстрочную развёртку и сокращают число строк до 575. При этом частота дискретизации составляет 12 МГц. С цветными изображениями ситуация усложняется тем, что необходимы дополнительная информация о цвете и применение помехозащищённого кодирования.

Необходимая скорость передачи по каналам цветного телевидения может достигать 200 Мбит/с, что практически совершенно недопустимо. В связи с этим разработан ряд международных стандартов сжатия изображений. Все они основаны на *кодировании преобразованием*. Суть его в следующем.

Изображение разделяется на блоки из $64 = 8 \cdot 8$ пикселей. Двумерный массив из 64 пикселей преобразуется в одномерный, далее применяется то или иное дискретное преобразование. Коэффициенты преобразования подвергаются обработке с целью сжатия и передаются по каналу связи. На приёмном конце осуществляется восстановление изображения путём обратного преобразования. Наилучшими с точки зрения объёма вычислений являются преобразования, отображающие вещественные данные в вещественную область. К ним относятся *дискретное преобразование Хартли (ДПХ)*, *дискретное косинусное преобразование (ДКП)*, *дискретное преобразование Уолша (ДПУ)*, *дискретное преобразование Хаара* и др.

К предстоящей курсовой работе по ДПФ 8 мая 2018 г.

5.6. Высокоскоростная свертка с использованием БПФ

Пусть имеются две последовательности $x(k)$ и $h(k)$ длиной в N отсчетов. Используя теорему о циклической свертке этих последовательностей, можно предложить следующую схему ее вычисления:

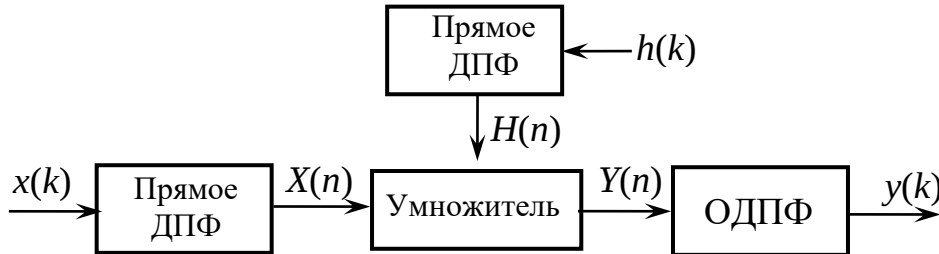


Рис.5.6.1. Блок-схема вычисления свертки с помощью ДПФ

По существу, это схема цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h(k)$ и входным сигналом $x(k)$. Эффективность данного способа обеспечивается использованием алгоритма БПФ для вычисления всех ДПФ. При больших N выигрыш в объеме вычислений по сравнению с прямым способом вычисления свертки во временной области может быть весьма значительным. Подсчитаем вычислительные затраты при использовании схемы рис. 5.6.1. и алгоритма БПФ с основанием 2:

- 1) $\frac{N}{2} \log_2 N$ базовых операций при вычислении всех коэффициентов ДПФ $X(n)$;
- 2) $\frac{N}{2} \log_2 N$ базовых операций при вычислении всех коэффициентов ДПФ $H(n)$;
- 3) $\frac{N}{2} \log_2 N$ базовых операций при вычислении ОДПФ;
- 4) N комплексных умножений для вычисления произведений $H(n) \cdot X(n)$,
 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Если интересоваться только самыми трудоемкими операциями комплексного умножения, то их число при использовании БПФ будет $N(3 \log_2 N + 1)$ вместо N^2 при прямом вычислении.

Пример. Пусть $N = 1024 = 2^{10}$. Выигрыш быстрого способа вычисления свертки по сравнению с прямым

$$p = \frac{N^2}{N(3 \log_2 N + 1)} = 33$$

и растет с увеличением N . Если коэффициент фильтра $H(n)$ найдены заранее и занесены в память, то

$$p = \frac{N^2}{2N \log_2 N + N} = 50.$$

Замечание. Схема на рис. 1 вычисляет циклическую свертку. При вычислении линейной свертки последовательности должны иметь $N/2$ ненулевых отсчетов, которые дополняются до массива N нулями. В общем случае, если требуется вычислить линейную свертку последовательностей $x(k)$ и

$h(k)$, имеющих N_1 и N_2 отсчетов соответственно, каждая из последовательностей дополняется нулями до $N = N_1 + N_2 - 1$ отсчетов.

Рассмотренные ранее алгоритмы БПФ с прореживанием по времени и по частоте дополняют друг друга при вычислении свертки. В графе с прореживанием по частоте входные отсчеты расположены в нормальном порядке, а выходные – в разрядно-инверсном. В графе с прореживанием по времени – наоборот. Если для прямого преобразования использовать граф с прореживанием по частоте, а для обратного – граф с прореживанием по времени, то необходимости в переупорядочении входных и выходных данных, а также промежуточных результатов, нет.

Особенности цифрового спектрального анализа методом ДПФ.

1. Введение.

ДПФ играет центральную роль в реализации большого числа алгоритмов цифровой обработки сигналов, что обеспечивается высокоэффективными методами его вычисления. Можно выделить три часто встречающиеся цели спектрального анализа: получение по возможности более точной информации

- а) об амплитудах спектральных компонент,
- б) о частотах спектра сигнала, в) о фазах спектральных компонент.

При гармоническом спектральном анализе методом ДПФ сформулированные выше цели спектрального анализа являются противоречивыми, и одновременное их решение требует определенного компромисса.

В приложениях и алгоритмах, основанных на явном вычислении преобразования Фурье

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (1.1)$$

при дискретном времени в идеале требуется дискретное по времени преобразование Фурье (ДВПФ)

$$X_d(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k\Delta t}. \quad (1.2)$$

Это континуальная периодическая функция частоты

$$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m f_d) \quad (1.3)$$

с периодом, равным частоте дискретизации $f_d = 1/\Delta t$. Периодическое размножение спектра $X(f)$ приводит к эффекту наложения («aliasing») и, как следствие, к погрешности спектрального анализа.

В большинстве задач цифрового спектрального анализа основной операцией является вычисление коэффициентов ДПФ. Программные и аппаратные реализации ДПФ обычно используют прямое преобразование в виде

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (1.4)$$

Масштабирующий множитель $1/N$ при этом фигурирует в формуле обратного ДПФ

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{j(2\pi/N)nk}. \quad (1.5)$$

Исходными данными для обработки являются N отсчётов сигнала $x(k\Delta t)$, т. е. время наблюдения сигнала равно $T = N\Delta t$. Такое усечение сигнала $x(k)$ по длительности эквивалентно умножению его на оконную функцию $w(k)$:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} [x(k)w(k)] e^{-j(2\pi/N)nk}. \quad (1.6)$$

Далее мы увидим, что вид и длительность окна определяют разрешающую способность и точность спектрального анализа.

Коэффициенты ДПФ $X(n)$ представляют собой масштабированные отсчеты ДВПФ, вычисленные на определенных частотах (на сетке частот ДПФ):

$$X(n) = \frac{1}{\Delta t} X_d(f_n), \quad f_n = n\Delta f = \frac{n}{N\Delta t} = f_d \frac{n}{N}. \quad (1.7)$$

Здесь $\Delta f = \frac{f_d}{N}$ – шаг дискретизации ДВПФ по частоте, N – размерность ДПФ.

Характерным для ДПФ является то, что сигнал $x(k)$ и его спектр $X(n)$ определяются на конечных и равных интервалах, $k, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, и являются N -периодическими.

Использование алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) позволяет значительно ускорить вычисление всех N коэффициентов ДПФ $X(n)$ по сравнению с методом прямого вычисления. Это имеет чрезвычайно важное значение и будет рассматриваться нами как неотъемлемая часть цифрового спектрального анализа.

2. Особенности спектрального анализа методом ДПФ

Эффект наложения («aliasing»)

Дискретизация сигнала $x(t)$ по времени с шагом Δt приводит к периодическому повторению исходного спектра $X(f)$ с периодом, равным частоте дискретизации $f_d = 1/\Delta t$. Полезная информация содержится в полосе $[-f_d/2, f_d/2]$. Если не принять специальных мер, возникает *эффект наложения*, в результате которого все частоты в спектре сигнала, превышающие половинную частоту дискретизации, как бы отражаются от этой частоты и переносятся на более низкие частоты, искажая исходный спектр (рис. 2.1а.). Для устранения этого эффекта сигнал перед дискретизацией предварительно пропускают через низкочастотный фильтр, частота среза которого равна $f_c = 1/2\Delta t$ (рис. 2.1б). Частота $f_d/2$ в зарубежной литературе называется *частотой Найквиста*.

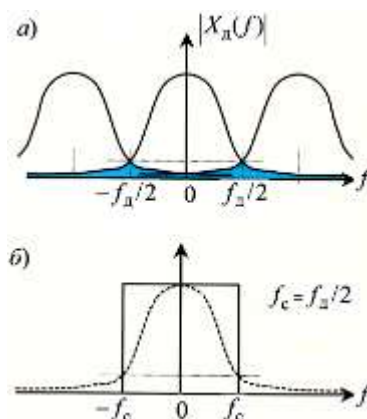


Рис. 2.1

Растекание спектральных компонент («leakage»)

Это явление неизбежно возникает при Фурье-анализе отрезков сигнала ограниченной длительности T , причем игнорируются все, что происходило до и после этого отрезка. Такое действие эквивалентно умножению сигнала на выделяющую функцию (временное окно) $w(t)$. Конечная длительность временного окна при анализе периодического сигнала приводит к тому, что результат получается не в виде идеальных спектральных линий, а каждая линия как бы «размывается» и сопровождается боковыми выбросами (рис. 2.2).

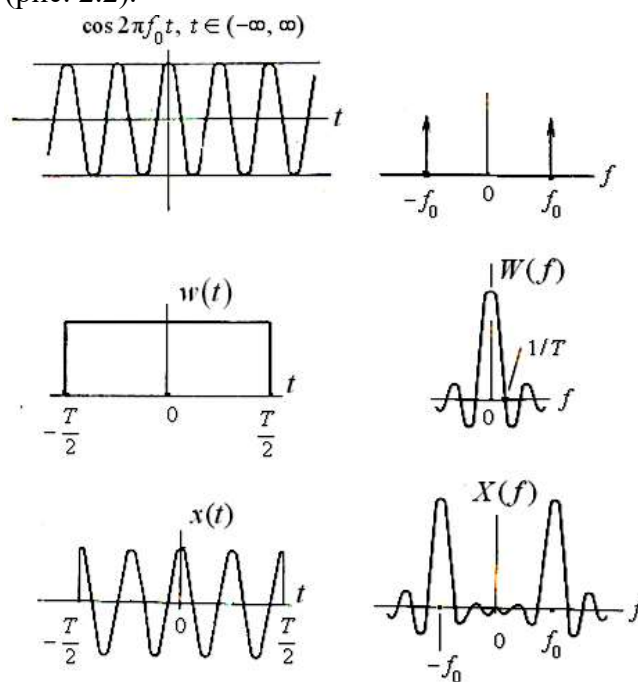


Рис. 2.2

Эти ложные выбросы можно значительно ослабить, устраняя разрывы сигнала и его производных на границах окна, умножением его на плавно изменяющуюся функцию, обращающуюся в нуль за пределами требуемого отрезка сигнала (рис. 2.3).

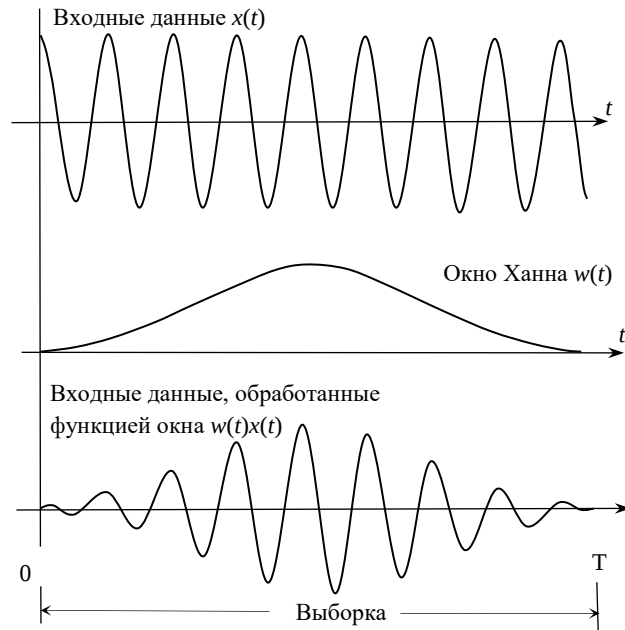


Рис. 2.3

Применение оконных функций при анализе периодических сигналов не приводит к заметным искажениям спектров. Основные этапы обработки непрерывного сигнала при вычислении ДПФ обозначены на рис. 2.4.

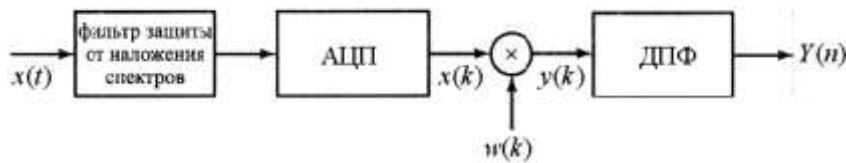


Рис. 2.4. Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ.

Аналоговый фильтр защиты от наложения ослабляет компоненты сигнала выше частоты Найквиста $f_d / 2$. Следующий за ним аналого-цифровой преобразователь (АЦП) выполняет операции дискретизации по времени и квантования выборок сигнала по уровню.

Во многих случаях длительность сигнала $x(t)$, а значит и $x(k)$ очень велика, поэтому перед вычислением ДПФ последовательность $x(k)$ умножается на конечное окно $w(k)$, определяющее размерность ДПФ. В результате получается конечная последовательность $y(k) = x(k)w(k)$, которой в частотной области соответствует периодическая свёртка

$$Y(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\mu)W(\nu - \mu)d\mu. \quad (2.1)$$

Здесь $\nu = f \Delta t = f / f_d$ – нормированная частота (доли частоты дискретизации),

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi\nu k} -$$

дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ) последовательности $x(k)$,

$$W(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-j2\pi\nu k} - \quad (2.2)$$

ДВПФ конечной последовательности $w(k)$. Непрерывные функции $X(\nu)$ и $W(\nu)$ периодичны по оси частот с периодом $\nu=1$. Рис. 2.5 иллюстрирует действие прямоугольного окна

$$w(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2}, \\ 0 & \text{при других } k. \end{cases} \quad (2.3)$$

Видно, что острые спектральные пики ДВПФ бесконечной косинусоидальной последовательности расширились за счёт свёртки с ДВПФ окна

$$W(\nu) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} w(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=-N/2}^{N/2} e^{-j2\pi\nu k} = \frac{\sin \pi\nu(N+1)}{\sin \pi\nu}. \quad (2.4)$$

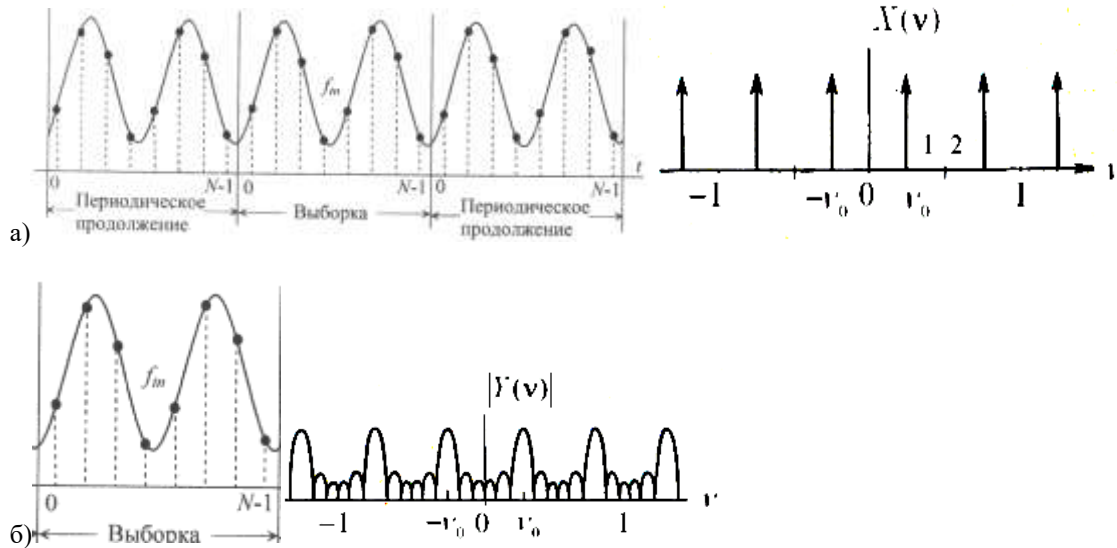


Рис. 2.5. Иллюстрация растекания спектральных компонент из-за взвешивания данных: a – исходная дискретно-временная косинусоидальная последовательность $x(k)$ и её ДВПФ $X(\nu)$; b – взвешенная косинусоидальная последовательность $y(k) = x(k)w(k)$ и модуль её ДВПФ $|Y(\nu)|$

Минимальная ширина спектральных пиков взвешенной окном последовательности определяется шириной главного лепестка функции $W(\nu)$ и не зависит от исходных данных. Боковые лепестки спектрального окна $W(\nu)$, иногда называемые *просачиванием*, будут также изменять амплитуды соседних спектральных пиков, что может привести к дополнительному смещению по частоте. Увеличение частоты дискретизации позволяет ослабить этот эффект. Просачивание приводит не только к амплитудным ошибкам при спектральном анализе, но может также маскировать присутствие слабых сигналов и, следовательно, препятствовать их обнаружению. Применение других оконных функций позволяет снизить уровень боковых лепестков по сравнению с их уровнем в случае прямоугольного окна. Снижение уровня боковых лепестков будет уменьшать смещение. Однако, как мы увидим в следующем параграфе, это даётся ценой расширения главного лепестка спектрального окна $W(\nu)$, что приводит к ухудшению разрешения. Следовательно, должен выбираться компромисс между шириной главного лепестка и уровнем подавления боковых лепестков.

Всё, что говорилось выше относительно растекания, утечки через боковые лепестки и разрешения при ДВПФ-анализе, переносится и на ДПФ-анализ в силу связи между ДВПФ и ДПФ.

Контрольные вопросы по ДПФ

1. Запишите формулы ДПФ.
2. Что такое поворачивающий множитель?
3. Чему равно разрешение по частоте при вычислении ДПФ?
4. С чем связаны трудности прямого вычисления ДПФ ?
5. Что такое БПФ?
6. Каков порядок сложности прямого вычисления ДПФ и БПФ?
7. Назовите основные свойства ДПФ.
8. Дайте определение дискретной нормированной частоты.
9. Поясните смысл ДПФ для периодической последовательности.
10. Как с помощью ДПФ рассчитывается амплитудный и фазовый спектры периодической последовательности? Пример с пятью отсчетами прямоугольного импульса.
11. Поясните смысл ДПФ для конечной последовательности.
12. Как связаны значения абсолютных частот (в герцах [Гц] и радианах в секунду [рад/с]) и дискретных нормированных частот?
13. Как восстановить аналоговый периодический сигнал с финитным спектром по отсчетам ДПФ и на основе ряда Котельникова?
14. Как вычислить спектральную плотность в L точках на основе ДПФ при $L > N$?
15. Как определить разрешение по частоте в ДПФ при добавлении нулей к исходной последовательности?
16. Запишите равенство Парсеваля и поясните его смысл.
17. Что называют растеканием спектра?
18. При каких условиях наблюдается эффект растекания спектра при ДПФ спектральном анализе.?
19. Какие меры принимают для уменьшения эффекта растекания спектра?
20. Поясните, при каком расстоянии между частотами дискретных гармоник возможно их различение на основе ДПФ?
21. Как улучшить различение дискретных гармоник с близко расположенными частотами?
22. Запишите и поясните формулу круговой свертки.
23. Запишите и поясните формулу линейной свертки.

24.Поясните алгоритм вычисления круговой свертки на основе ДПФ.

25.Поясните алгоритм вычисления линейной свертки на основе ДПФ.

26.С какой целью вычисление реакции линейной дискретной системы (ЛДС) по формуле свертки выполняется на основе БПФ?

27.Поясните алгоритм вычисления реакции ЛДС по формуле свертки на основе БПФ.

Повторить лекции по ДПФ 27 марта, 3 апреля, 10 апреля