

## Глава 5. Алгоритмы вычисления ДПФ

В этой главе обсуждаются конкретные методы вычисления ДПФ. Особое внимание будет уделено высокоэффективным алгоритмам цифрового вычисления, которые обычно называют *быстрым преобразованием Фурье* (БПФ).

### 5.1. Быстрое преобразование Фурье

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) представляет собой эффективный метод вычисления ДПФ. Его эффективность заключается в существенном уменьшении числа операций умножения и суммирования, затрачиваемых для получения всех  $N$  коэффициентов ДПФ, которые запишем в виде

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{nk}, \quad (5.1.1)$$

где  $W_N^{nk} = \exp(-j \frac{2\pi}{N} nk)$  – дискретные экспоненциальные функции,  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Здесь и далее масштабирующий множитель  $1/N$  в прямом преобразовании для простоты опущен.

Прямое вычисление всех  $N$  коэффициентов ДПФ по (5.1.1) требует  $N^2$  операций типа «комплексное умножение плюс сложение». Основная идея БПФ состоит в том, чтобы разбить исходную  $N$ -точечную последовательность на две более короткие последовательности, из ДПФ которых можно получить ДПФ исходной  $N$ -точечной последовательности. Так, например, если  $N$  чётное, то исходная  $N$ -точечная последовательность разбивается на две  $(N/2)$ -точечные последовательности. Для вычисления искомого  $N$ -точечного ДПФ потребуется  $(N/2)^2 \cdot 2$  операций типа «комплексное умножение плюс сложение», т. е. вдвое меньше по сравнению с прямым вычислением. Такое уменьшение размерности ДПФ вдвое называется *итерацией*. Эту операцию можно повторить, вычисляя вместо  $(N/2)$ -точечного ДПФ два  $(N/4)$ -точечных ДПФ, сокращая тем самым объём вычислений ещё в два раза. Процесс уменьшения размера ДПФ продолжается до тех пор, пока не останутся только двухточечные ДПФ. Как будет показано далее, алгоритм БПФ с основанием 2 затрачивает на вычисление искомого  $N$ -точечного ДПФ  $N \log_2 N$  операций, так что выигрыш в числе операций составляет

$$p = \frac{N^2}{N \log_2 N} = \frac{N}{\log_2 N} \text{ и при увеличении } N \text{ может быть очень большим.}$$

Алгоритм БПФ основан на периодичности ядра преобразования  $W_N^{nk}$ .

#### Алгоритм БПФ с составным основанием

Прямой метод вычисления всех коэффициентов в соответствии с (5.1.1) требует  $N^2$  операций комплексного умножения и суммирования. Это число может оказаться очень большим. Возможность сокращения числа операций основывается на представлении одномерного ДПФ в виде многомерного. Для этого необходимо, чтобы длина массива являлась составным числом

$$N = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_p. \quad (5.1.2)$$

Разберем эту возможность на пример двух сомножителей:

$$N = N_1 N_2. \quad (5.1.3)$$

При этом входной массив из  $N$  отсчетов разбивается на  $N_2$  блоков по  $N_1$  элементов в каждом (рис. 5.1.1).

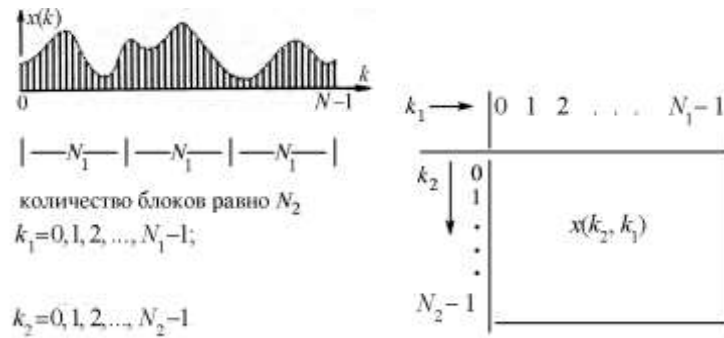


Рис. 5.1.1. Образование двумерного массива из одномерного

Расположив блоки один под другим, получаем двумерный массив. Нетрудно убедиться, что одномерный номер  $k$  может быть представлен в виде

$$k = N_1 k_2 + k_1. \tag{5.1.4}$$

Первое слагаемое соответствует целому числу ( $k_2$ ) блоков, предшествующих номеру  $k$ , а второе слагаемое определяет номер элемента в блоке, содержащем номер  $k$ .

ДПФ этого двумерного массива также будет иметь вид двумерного массива с переменными  $n_1$  и  $n_2$ :

$$n_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

Пусть двумерный массив имеет вид (рис. 10.2)

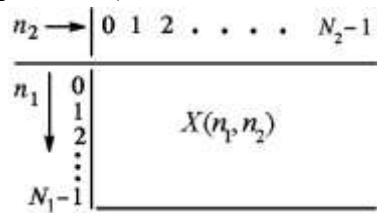


Рис. 10.2

Одномерный номер  $n$  может быть представлен в виде

$$n = N_2 n_1 + n_2. \tag{5.1.5}$$

Для базисной функции ДПФ  $W_N^{nk}$  с учетом (5.1.4) и (5.1.5) можем записать

$$W_N^{kn} = W_N^{(N_1 \cdot k_2 + k_1)(N_2 \cdot n_1 + n_2)} = W_N^{N \cdot k_2 \cdot n_1} W_N^{N_1 \cdot k_2 \cdot n_2} W_N^{N_2 \cdot k_1 \cdot n_1} W_N^{k_1 \cdot n_2}.$$

Учитывая, что

$$W_N^{N \cdot k_2 \cdot n_1} = 1; \quad W_N^{N_1 \cdot k_2 \cdot n_2} = W_{N_2}^{k_2 \cdot n_2}; \quad W_N^{N_2 \cdot k_1 \cdot n_1} = W_{N_1}^{k_1 \cdot n_1},$$

получаем

$$W_N^{kn} = W_{N_1}^{k_1 \cdot n_1} W_N^{k_1 \cdot n_2} W_{N_2}^{k_2 \cdot n_2}.$$

Подставим это выражение в (5.1.1), тогда

$$X(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{k_1 n_1} \overset{\substack{\uparrow \\ \text{Вектор} \\ \text{поворота}}}{W_N^{k_1 n_2}} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} x(k_2, k_1) \overset{\substack{\leftarrow N_2 \text{точечные ДПФ} \rightarrow}}{W_{N_2}^{k_2 n_2}}. \quad (5.1.6)$$

$\longleftarrow N_1\text{-точечные ДПФ} \longrightarrow$

Можно выделить следующие этапы вычисления коэффициентов ДПФ:

- 1) сначала вычисляются  $N_2$ -точечные ДПФ с ядром  $W_{N_2}^{k_2 n_2}$  по столбцам матрицы  $[x(k_2, k_1)]$ :

$$Y(k_1, n_2) = \sum_{k_2=0}^{N_2-1} x(k_2, k_1) W_{N_2}^{k_2 n_2};$$

число таких ДПФ соответствует числу столбцов матрицы  $[x(k_2, k_1)]$  и равно  $N_1$ ;

- 2) умножение на поворачивающие множители  $W_N^{n_2 k_1}$ , в результате образуется новый массив

$$Z(k_1, n_2) = Y(k_1, n_2) W_N^{n_2 k_1};$$

число умножений равно  $N_1 \cdot N_2$ ;

- 3) вычисляются ДПФ с ядром  $W_{N_1}^{n_1 k_1}$  по столбцам матрицы  $[Z(k_1, n_2)]$ :

$$X(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} Z(k_1, n_2) W_{N_1}^{n_1 k_1}.$$

Полное число операций в сумме по всем трем этапам будет

$$M = N_1 \cdot (N_2)^2 + N_1 \cdot N_2 + N_2 \cdot (N_1)^2 = N_1 \cdot N_2 \cdot (N_1 + N_2 + 1),$$

т. е. меньше, чем  $N^2 = (N_1)^2 \cdot (N_2)^2$  при прямом методе вычислений.

Таким образом, исходное  $N$ -точечное ДПФ оказалось сведённым к ДПФ, производимым над уменьшенными массивами  $N_2$  и  $N_1$ .

**Пример. 5.1.1.** Пусть  $N = 35 = 5 \cdot 7$ . БПФ-алгоритм выполняется за  $M = 5 \cdot 7 \cdot (5 + 7 + 1) = 455$  операций вместо  $N^2 = 1225$  при прямом вычислении по (5.1.1).

Если  $N_1$  и  $N_2$  сами являются составными, то каждое из ДПФ $_{N_1}$  и ДПФ $_{N_2}$  может быть выполнено с применением рассмотренного алгоритма. Выигрыш в числе операций при этом еще более возрастает. В общем случае, если выполняется (5.1.2), такая процедура позволяет уменьшить общее число операций при вычислении ДПФ до величины

$$N \sum_{i=1}^p N_i \text{ вместо } N^2 = N \prod_{i=1}^p N_i.$$

В заключение на рис. 5.1.3 приведен граф БПФ для  $N = 6 = 2 \cdot 3$  ( $N_1 = 2, N_2 = 3$ ).

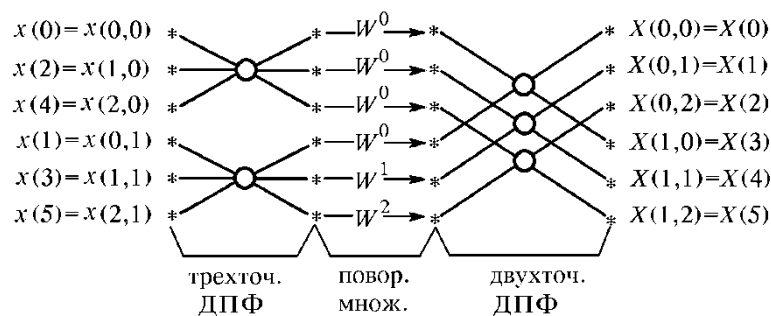


Рис. 5.1.3. Граф БПФ для составного  $N = 6$

Умножение на поворачивающие множители обозначено стрелками, рядом с которыми записаны значения коэффициентов  $W_6^{n_2 k_1}$ . Звездочкой обозначены ячейки памяти.

### 5.2. Алгоритмы БПФ с основанием 2

Рассмотрим случай, когда  $N$  является степенью двойки. Пусть в (5.1.2)  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = N/2$ , тогда на первой итерации  $N$ -точечное ДПФ представляется через двухточечные и  $N/2$ -точечные ДПФ:

$$X(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^1 W_2^{n_1 k_1} W_N^{n_2 k_1} \sum_{k_2=0}^{(N/2)-1} W_{N/2}^{n_2 k_2} x(k_2, k_1). \quad (5.2.1)$$

Эта же схема вычислений может быть использована на следующей итерации для получения каждого из  $N/2$ -точечных ДПФ. В результате перейдем к  $N/4$ -точечным ДПФ и т. д., пока не останутся только двухточечные ДПФ. Соответствующий граф вычислений для  $N = 8$  приведен на рис. 5.2.1.

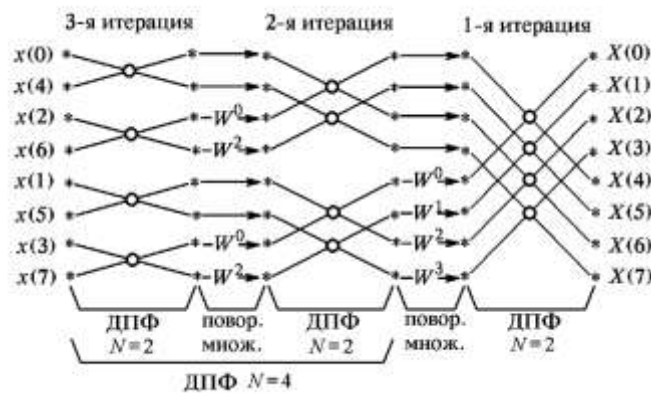


Рис. 5.2.1. Граф алгоритма БПФ с прореживанием по времени для  $N = 8$

В данном графе умножение на вектор поворота выполняется до двухточечного ДПФ. Такой алгоритм получил название *алгоритма БПФ с прореживанием по времени*. Его базовая операция «бабочка» приведена на рис. 5.2.2. Само двухточечное ДПФ не содержит умножений: все умножения сводятся к умножениям на поворачивающие множители  $W_N^m$ , расположенные у стрелочек.

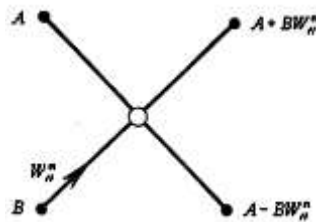


Рис. 5.2.2. Базовая операция «бабочка» алгоритма БПФ с прореживанием по времени

На каждой итерации имеется  $N/2$  базовых операций алгоритма БПФ, каждая из которых состоит из умножения на вектор поворота и двухточечного ДПФ. Еще одной особенностью графа на рис. 5.2.1 является то, что входные отсчеты расположены в так называемом разрядно-инверсном порядке, а выходные – в естественном.

Но- мер	Двоичное представление	Инверсия разрядов	Разрядно- инверсный. порядок
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Пусть теперь в (5.1.2)  $N_1 = N / 2$ ,  $N_2 = 2$ . Тогда

$$X(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N/2-1} W_{N/2}^{n_1 k_1} \cdot W_N^{n_2 k_1} \sum_{k_2=0}^1 x(k_2, k_1) W_2^{n_2 k_2}. \quad (5.2.2)$$



Здесь вначале выполняются двухточечные ДПФ над входным массивом, затем  $N / 2$ -точечные. На следующей итерации аналогично представляются  $N / 2$ -точечные ДПФ. Соответствующий данной процедуре граф вычислений для  $N = 8$  представлен на рис. 5.2.3.

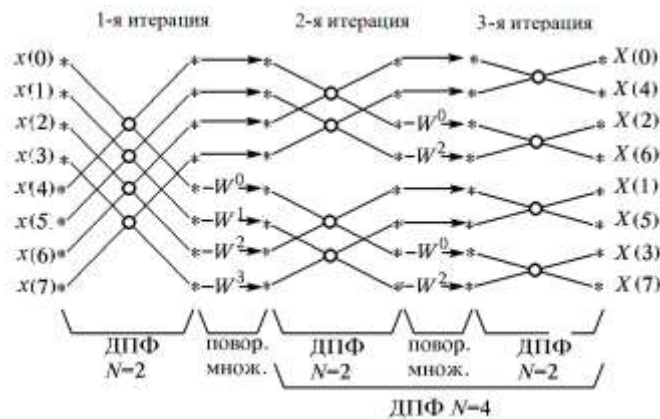


Рис. 5.2.3. Граф алгоритма БПФ с прореживанием по частоте для  $N = 8$

Особенностью этого графа является естественный порядок данных на входе и разрядно-инверсный порядок на выходе. В этом алгоритме в отличие от предыдущего самые сложные умножения на поворачивающие множители производятся в начале графа.

В базовой операции алгоритма (рис. 5.2.4) сначала выполняется двухточечное ДПФ, а затем умножение на вектор поворота. Такой алгоритм носит название *алгоритма БПФ с прореживанием по частоте*.

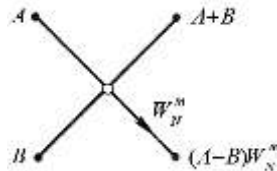


Рис. 5.2.4. Базовая операция «бабочка» алгоритма БПФ с прореживанием по частоте

Граф алгоритма БПФ с прореживанием по частоте можно получить из рис. 5.2.1, если входные и выходные отсчёты поменять местами, направления стрелок изменить на обратное и читать справа налево.

В алгоритме БПФ по основанию 2 на каждой итерации, по крайней мере, половина поворачивающих множителей – единицы, а число итераций равно  $\log_2 N$ , поэтому общее число комплексных умножений не превышает

$$M = (N/2) \log_2 N.$$

На каждой итерации в алгоритме БПФ по основанию 2 выполняется  $N/2$  двухточечных ДПФ или  $N$  сложений. Всего в алгоритме БПФ по основанию 2 затрачивается

$$A = N \log_2 N$$

комплексных сложений. Можно считать, что при вычислении всех  $N$  коэффициентов ДПФ требуется около  $N \log_2 N$  вычислительных операций типа «комплексное умножение плюс сложение» вместо  $N^2$  при прямом вычислении по 5.1.1. При больших  $N$  выигрыш в числе операций может быть значительным. Например, при  $N = 2^{10} = 1024$  этот выигрыш составляет  $N/\log_2 N \approx 100$ .

Вычисление обратного ДПФ может быть проведено с использованием любого из описанных выше алгоритмов БПФ:

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{-nk} = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} X^*(n) W_N^{nk} \right]^*. \quad (5.2.3)$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой ДПФ последовательности  $X^*(n)$ , комплексно-сопряженной с  $X(n)$ , и может быть вычислено с использованием одного из описанных выше алгоритмов. Искомая последовательность  $x(k)$  получается, таким образом, комплексным сопряжением этого ДПФ. Если последовательность  $x(k)$  действительная, то комплексного сопряжения ДПФ не требуется. В (5.2.3) по-прежнему  $W_N^{nk} = e^{-j2\pi nk/N}$ .

При вычислениях на каждой базовой операции БПФ по основанию 2, включающей вычисление одного двухточечного ДПФ и умножение на поворачивающий множитель, выходные результаты можно размещать в те же ячейки памяти, где находились исходные данные. Такой алгоритм БПФ

называется *алгоритмом с замещением*. Графы, представленные на рис. 5.2.2 и рис. 5.2.3 соответствуют *алгоритмам с замещением*.

Математическая операция перехода из одномерного массива данных к двумерному является основой всех алгоритмов БПФ. Существует большое разнообразие алгоритмов БПФ, отличающихся порядком следования входных, промежуточных и выходных отсчетов, организацией вычислений, регулярностью структуры и т. д.

Известна, например, другая, часто используемая модификация алгоритмов БПФ, отличная от алгоритмов с замещением. Она получила название *алгоритмов с постоянной структурой*. Граф этого алгоритма для  $N = 8$  с нормальным порядком входных и разрядно-инверсным выходных отсчетов приведен на рис. 5.2.5. Отличительной особенностью этого графа является то, что все итерации имеют одинаковую структуру, различаются лишь поворачивающие множители между итерациями.

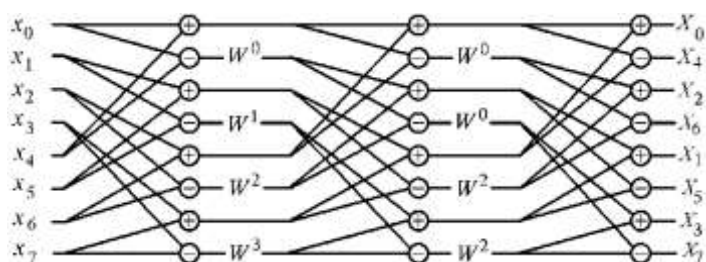


Рис. 5.2.5. Граф алгоритма БПФ с постоянной структурой с нормальным порядком входных и разрядно-инверсным порядком выходных отсчетов для  $N = 8$

Этот алгоритм имеет и другую модификацию, при которой порядок входных отсчетов разрядно-инверсный, а выходных – нормальный (рис. 5.2.6).

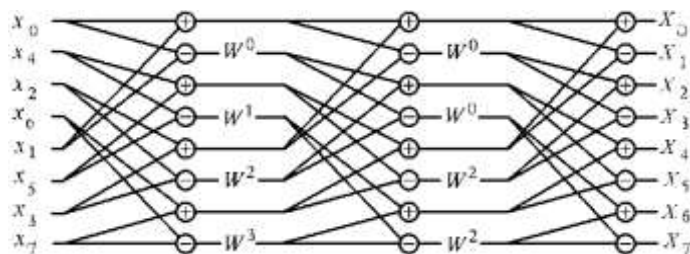


Рис. 5.2.6. Граф алгоритма БПФ с постоянной структурой с разрядно-инверсным порядком входных и нормальным выходных отсчетов для  $N = 8$

Алгоритм БПФ по основанию 2 был предложен Кули и Тьюки в 1965 году и дал огромный импульс развитию цифровых методов обработки сигналов. Однако алгоритмы БПФ в наиболее общем виде были получены известным математиком Гауссом (1777–1855) и опубликованы в 1865 году.

### Разбиение $N$ -точечного ДПФ на два $N/2$ -точечных

Пусть  $x(k)$  – действительная последовательность длиной в  $N$  отсчетов и пусть  $x(k) \Leftrightarrow X(n)$ ,  $n \in N$ . Разобьём последовательность  $x(k)$  на две  $\frac{N}{2}$ -точечные подпоследовательности  $x_1(k) = x(2k)$  и  $x_2(k) = x(2k+1)$  из чётных и нечётных отсчетов соответственно. Пусть  $x_1(k) \Leftrightarrow X_1(n)_{N/2}$  и

$x_2(k) \Leftrightarrow X_2(n)_{N/2}$  – два  $\frac{N}{2}$ -точечных ДПФ этих подпоследовательностей. Установим связь  $X(n)$  с  $X_1(n)_{N/2}$  и  $X_2(n)_{N/2}$ . Для первых  $N/2$  коэффициентов ДПФ ( $n=0, 1, 2, \dots, (N/2)-1$ ) можем записать

$$\begin{aligned} X(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W_N^{-nk} = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} x(2k)W_N^{-2nk} + \sum_{k=0}^{(N/2)-1} x(2k+1)W_N^{-n(2k+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{(N/2)-1} x_1(k)W_{N/2}^{-nk} + W_N^{-n} \sum_{k=0}^{(N/2)-1} x_2(k)W_{N/2}^{-nk} = X_1(n)_{N/2} + W_N^{-n} X_2(n)_{N/2}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $W_N^{-2nk} = W_{N/2}^{-nk}$ . Для  $n=N/2, \dots, N-1$  с учётом свойств симметрии будем иметь  $X(n) = X^*(N-n)$ .

Это разбиение позволяет лучше понять граф алгоритма БПФ с прореживанием по времени.

### 5.3. Матричная форма ДПФ

Введем в рассмотрение квадратную матрицу  $[W]_N$  порядка  $N$  с элементами

$$W_N^{nk} = \exp(j \frac{2\pi}{N} nk), \quad n, k \in 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

так, что номер строки совпадает с номером дискретной экспоненциальной функции, а номер столбца совпадает с номером отсчета функций. При этом произведение  $n \cdot k$  обычно берется по модулю  $N$ , т. е.

$$W_N^{nk} = W_N^{nk \pmod{N}}.$$

Например,  $nk=17$ , тогда  $nk_8=1$ . Эти свойства матрицы ДПФ следуют из  $N$ -периодичности функции  $W_N^{nk}$  по обоим аргументам. Для случая  $N=8$  матрица ДПФ имеет вид

$$[W]_8 = \begin{matrix} k \rightarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ n \downarrow & \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

Эта же матрица с минимальными фазами будет



$$[W]_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} k \rightarrow 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \downarrow 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^2 & W_8^5 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^4 & W_8^1 & W_8^6 & W_8^3 \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^4 & W_8^3 & W_8^2 & W_8^1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Матрица ДПФ является симметрической и относится к классу так называемых *унитарных матриц*, для которых обратная матрица получается транспонированием и заменой элементов на комплексно-сопряженные так, что

$$[W^*]_N^T [W]_N = N[I]_N,$$

где  $[I]_N$  – единичная матрица размером  $N \times N$ , а  $T$  – знак транспонирования.

**Пример .**

$$[W]_4 = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & 1 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix}, \quad [W]_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3} \\ 1 & W_4^{-2} & 1 & W_4^{-2} \\ 1 & W_4^{-3} & W_4^{-2} & W_4^{-1} \end{bmatrix}.$$

В матричной форме пара ДПФ имеет вид

$$\bar{X} = \frac{1}{N} [W]_N^{-1} \bar{x} \text{ – прямое ДПФ,}$$

$$\bar{x} = [W]_N \bar{X} \text{ – обратное ДПФ.}$$

Здесь  $\bar{X}$  и  $\bar{x}$  –  $N$ -мерные вектор-столбцы:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}.$$

### Задачи к лекции 17 апреля 2018 г.

1. Изобразить граф БПФ с прореживанием по времени для  $N = 16$ .
2. Изобразить граф БПФ с прореживанием по частоте для  $N = 16$ .