

Примеры пространств сигналов

Пространство L_2

Элементами метрического пространства являются в общем случае комплексные функции $x(t)$, заданные на интервале T , конечном или бесконечном. Будем считать, что функции $x(t)$ являются функциями с интегрируемым квадратом

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Этот интеграл обычно трактуется как энергия сигнала, если принять, что $x(t)$ – это ток или напряжение на сопротивлении 1 Ом.

При этом L_2 является пространством с ограниченной энергией. Все физические сигналы имеют конечную энергию.

В L_2 скалярное произведение, норма и расстояние определяются соответственно

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_T x(t) y^*(t) dt, \quad (1.2.22)$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\int_T |x(t)|^2 dt}, \quad (1.2.23)$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\int_T |x(t) - y(t)|^2 dt}. \quad (1.2.24)$$

Метрика $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ называется среднеквадратичной метрикой и определяет среднеквадратичное отклонение сигнала $y(t)$ от $x(t)$.

Условие ортогональности двух векторов φ_m и φ_n в L_2 записывается в виде

$$\int_T \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|\varphi_n\|^2 = \int_T |\varphi_n(t)|^2 dt, & m = n. \end{cases} \quad (1.2.25)$$

Обобщенный ряд Фурье (1.2.13) в L_2 принимает вид

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t), \quad (1.2.26)$$

где

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_T x(t) \varphi_n^*(t) dt \quad (1.2.27)$$

есть коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_n\}$.

Пространство l_2

Элементами множества S являются последовательности чисел (в общем случае комплексные) $\mathbf{x} = [x(0), x(1), x(2), \dots, x(k), \dots]$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty. \quad (1.2.28)$$

Такие последовательности называют также счётномерными векторами. В данном классе последовательностей вводят операции сложения векторов и умножения их на скаляр:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [x(0) + y(0), x(1) + y(1), \dots, x(k) + y(k), \dots],$$

$$\alpha \mathbf{x} = [\alpha x(0), \alpha x(1), \dots, \alpha x(k), \dots].$$

Скалярное произведение, норма и расстояние определяются соответственно

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) y^*(k), \quad (1.2.29)$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^2}, \quad (1.2.30)$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |x(k) - y(k)|^2}. \quad (1.2.31)$$

Эти соотношения определяют пространство \mathbf{I}_2 , которое можно рассматривать как координатную реализацию гильбертова пространства \mathbf{L}_2 .

Обратимся к формулам обобщенного ряда Фурье (1.2.13) – (1.2.18). Эти формулы устанавливают взаимно однозначное соответствие (*изоморфизм*) между сигналом и совокупностью его коэффициентов Фурье. Сигнал $x(t)$ является элементом пространства \mathbf{L}_2 , а совокупность коэффициентов Фурье (счетномерный вектор) $\{c_n\}$ – элементом пространства \mathbf{I}_2 . Между пространствами \mathbf{L}_2 и \mathbf{I}_2 устанавливается изометрия, при которой сохраняется норма элементов пространств \mathbf{L}_2 и \mathbf{I}_2 (1.2.18).

Пространство \mathbf{I}_2^N

Ограничение размерности векторов до N координат $\mathbf{x} = [x(0), x(1), x(2), \dots, x(k), \dots, x(N-1)]$ приводит к пространству \mathbf{I}_2^N , которое является подпространством комплексного гильбертова пространства \mathbf{I}_2 . Характерно, что в \mathbf{I}_2^N существуют N линейно независимых векторов $\boldsymbol{\psi}_n$. Эти N векторов называют базисом N -мерного пространства.

Обобщенный ряд Фурье в пространстве \mathbf{I}_2^N с ортогональным базисом $\{\boldsymbol{\psi}_n\}$ принимает вид

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \psi_n(k), \quad (1.2.32)$$

где

$$c_n = \frac{1}{\|\boldsymbol{\psi}_n\|^2} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \psi_n^*(k), \quad (1.2.33)$$

$$(\boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\psi}_m) = \sum_{k=0}^{N-1} \psi_n(k) \psi_m^*(k) = \begin{cases} \|\boldsymbol{\psi}_n\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |\psi_n(k)|^2, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (1.2.34)$$

1.3. Представление сигналов ортогональными рядами.

Общий метод дискретизации

Аналоговый сигнал $x(t)$, определенный на интервале T , конечном или бесконечном, при соблюдении некоторых условий может быть представлен в виде

$$x(t) = \sum_n c_n \varphi_n(t), \quad (1.3.1)$$

где $\{\varphi_n(t)\}$ – ортогональный базис, в общем случае бесконечномерный, а $\{c_n\}$ – "спектр" сигнала $x(t)$ в базисе $\{\varphi_n(t)\}$, т. е. набор чисел, выбираемых по определенному правилу, причем c_n могут быть комплексными. Считаем, что $x(t)$ является функцией с интегрируемым квадратом:

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (1.3.2)$$

Для реальных физических сигналов это означает конечность их удельной энергии, выделяемой на единичном сопротивлении.

Базисные функции $\varphi_n(t)$ ортогональны на интервале T , т. е.

$$\int_T \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|\Phi_n\|^2 = \int_T |\varphi_n(t)|^2 dt, & m = n. \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Практически всегда число членов в ряде (1.3.1) должно быть ограничено. Как будет показано в следующем параграфе, коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{(\mathbf{x}, \Phi_n)}{(\Phi_n, \Phi_n)} = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_T x(t) \varphi_n^*(t) dt \quad (1.3.4)$$

обеспечивают наименьшую среднеквадратическую погрешность аппроксимации:

$$x(t) \approx \sum_{|n| \leq N} c_n \varphi_n(t). \quad (1.3.5)$$

Вывод. Замена аналогового сигнала $x(t)$ последовательностью $\{c_n\}$, представляющей коэффициенты разложения этого сигнала по какому-либо ортогональному базису, – самый общий метод дискретизации. Вместо того, чтобы рассматривать функциональную зависимость $x(t)$ в несчётном множестве точек, мы можем характеризовать сигнал счётной системой коэффициентов c_n . Базис выбирается из удобства физической реализации, простоты вычисления коэффициентов и точности аппроксимации (1.3.5)

Обобщённые ряды Фурье. Полные ортонормированные системы

Важная особенность дискретных представлений вида (1.3.1) состоит в том, что от них просто перейти к приближенным конечным представлениям, необходимым для численных расчетов и при физических измерениях сигналов. В связи с этим возникает ряд математических и практических вопросов. К числу математических вопросов относятся следующие.

1) Практически можно использовать только конечное число коэффициентов c_n . Как следует выбирать эти коэффициенты, чтобы минимизировать среднеквадратическую ошибку

$$\varepsilon^2(N) = \int_T \left| x(t) - \sum_{|n| \leq N} c_n \varphi_n(t) \right|^2 dt ? \quad (1.3.6)$$

2) Желательно, чтобы $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon^2(N) = 0$. Когда это имеет место?

Для ответа на первый вопрос достаточно продифференцировать (1.3.6) по некоторому конкретному c_n . Если коэффициенты c_n комплексные, производная берется по действительной и мнимой частям. Приравняв производную нулю и решая относительно c_n , получим, что коэффициенты c_n должны быть

$$c_n = \frac{(\mathbf{x}, \Phi_n)}{(\Phi_n, \Phi_n)} = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_T x(t) \varphi_n^*(t) dt. \quad (1.3.7)$$

Коэффициенты c_n , выбираемые по алгоритму (1.3.7), называются коэффициентами Фурье по системе $\{\varphi_n(t)\}$. Таким образом, из всех полиномов N -го порядка вида (1.3.5) наименьшее среднеквадратическое отклонение от данного сигнала $x(t)$ имеет N -я частичная сумма ряда Фурье по системе $\{\varphi_n(t)\}$. Это следует из того, что вторая производная (1.3.6) является положительной постоянной величиной, и коэффициенты, определяемые из (1.3.7), обеспечивают абсолютный минимум ошибки $\varepsilon^2(N)$. Важно отметить, что при увеличении N величины ранее вычисленных коэффициентов c_n остаются неизменными. В результате значительно экономится объем вычислений, если после оценки ошибки приходится принять решение об увеличении числа членов ряда.

Для ортонормированной системы функций

$$\phi_n(t) = \frac{\varphi_n(t)}{\|\Phi_n\|} \quad (1.3.8)$$

коэффициенты Фурье будут вычисляться по формуле

$$a_n = \int_T x(t) \phi_n^*(t) dt. \quad (1.3.9)$$

Ответим теперь на второй вопрос. Из выражения (1.3.6) имеем

$$\varepsilon^2(N) = \int_T \{ [x(t) - \sum_{|n| \leq N} a_n \phi_n(t)] [x(t) - \sum_{|m| \leq N} a_m^* \phi_m^*(t)] \} dt.$$

Отсюда

$$\varepsilon^2(N) = \int_T x^2(t) dt - \sum_{|n| \leq N} |a_n|^2. \quad (1.3.10)$$

Поэтому при любом конечном N имеет место

$$\sum_{|n| \leq N} |a_n|^2 \leq \int_T x^2(t) dt \quad (1.3.11)$$

– *неравенство Бесселя*. Из (1.3.11) вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. Если $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon^2(N) = 0$ для всех $x(t)$ с конечной энергией, то $\{\phi_n(t)\}$ – *полная ортонормированная система* в пространстве L_2 . Смысл полноты системы заключается в том, что для такой системы ошибка $\varepsilon^2(N)$ при увеличении N может быть сделана как угодно малой. Для полных ортонормированных систем имеет место *равенство Парсеваля*:

$$\int_T x^2(t) dt = \sum_{|n|=0}^{\infty} |a_n|^2. \quad (1.3.12)$$

Поэтому

$$\varepsilon^2(N) = \sum_{|n| > N} |a_n|^2, \quad (1.3.13)$$

т. е. ошибка определяется суммой квадратов модулей отброшенных коэффициентов Фурье. Соотношения (1.3.10)–(1.3.13) имеют важное практическое значение.

1.4. Некоторые системы базисных функций из L_2

Можно выделить два класса базисных функций: *сдвиговые* и *мультипликативные*.

Сдвиговые базисные функции строятся из одной функции путём сдвига по её аргументу. Наиболее употребительными сдвиговыми базисными функциями являются *функции отсчётов* и *импульсные функции*.

Функции отсчётов

Функциями отсчетов называют функции, определяемые как

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin 2\pi f_g(t - k\Delta t)}{2\pi f_g(t - k\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_g}. \quad (1.4.1)$$

Эти функции отличаются друг от друга только сдвигом на целое число интервалов Δt , они ортогональны на $(-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_l(t)dt = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \|\varphi_n\|^2 = \Delta t = \frac{1}{2f_g}, & k = l. \end{cases} \quad (1.4.2)$$

Функции отсчетов используются для дискретного представления аналоговых сигналов по теореме отсчетов Котельникова. Свое название эти функции получили потому, что для сигналов, имеющих финитный спектр, коэффициенты Фурье c_k по этим функциям являются отсчётами сигнала при $t = k\Delta t$:

$$c_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin 2\pi f_g(t - k\Delta t)}{2\pi f_g(t - k\Delta t)} dt = x(k\Delta t). \quad (1.4.3)$$

Простота вычисления коэффициентов c_k является большим преимуществом ряда

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_g(t - k\Delta t)}{2\pi f_g(t - k\Delta t)}, \quad (1.4.4)$$

который называется рядом Котельникова. Об этом будет идти речь в следующей главе, а сейчас перечислим некоторые полезные свойства функций отсчетов.

Фурье-образ функции отсчётов

$$\Phi_k(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) e^{-j2\pi f t} dt = \Pi_{2f_g}(f) \exp(-j2\pi f k\Delta t) \quad (1.4.5)$$

имеет фазовый множитель из-за сдвига по времени на $k\Delta t$. Модуль этого спектра $\Pi_{2f_g}(f)$ является прямоугольной функцией с единичной площадью (рис. 1.4.1). В момент времени $t = k\Delta t$ функция отсчетов достигает своего наибольшего значения, равного 1. В моменты $t = (k \pm l)\Delta t$, где $l = 1, 2, \dots$, функция отсчетов обращается в нуль.

Ширина главного лепестка функции отсчетов на нулевом уровне равна $2\Delta t = 1/f_g$. Отсюда следует, что минимальная длительность импульса на выходе фильтра с полосой $[-f_g, f_g]$ равна $1/f_g$.

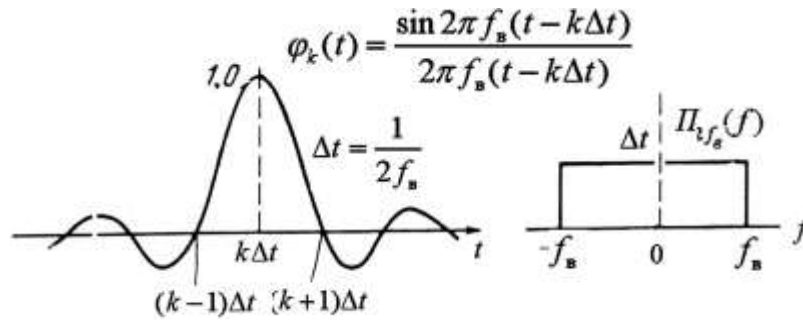


Рис. 1.4.1. Функция отсчётов и ее спектр

Непосредственно из формулы прямого преобразования Фурье следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) dt = \Pi_{2f_n}(0) = \frac{1}{2f_n} = \Delta t. \quad (1.4.6)$$

В пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ система функций отсчетов ортогональна, но не полна. Однако в подпространстве $\mathbf{V} \subset L_2$ функций с финитным спектром в полосе $[-f_n, f_n]$ она полна.

Импульсные базисные функции

Эти функции определяются как

$$\Pi_k(t) = \begin{cases} 1, & k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t, \\ 0, & \text{при других } t, \end{cases} \quad (1.4.7)$$

где Δt – стандартный сдвиг, $|k| = 0, 1, 2, \dots$. Функции $\Pi_k(t)$ ортогональны на всей оси t . Пространство, натянутое на этот базис, составляют ступенчатые функции

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k \Pi_k(t).$$

Рассмотрим теперь *мультипликативные* базисные функции, которые обладают тем свойством, что произведение двух функций даёт базисную функцию из той же системы. Известными мультипликативными базисными функциями являются *комплексные экспоненциальные функции* и *функции Уолша*.

Комплексные экспоненциальные функции

Это функции вида

$$\varphi_n(t) = \exp(j \frac{2\pi}{T} nt), \quad n \in (-\infty, \infty). \quad (1.4.8)$$

Функции $\varphi_n(t)$ периодичны по оси t с периодом T . Система $\{\varphi_n\}$ составляет счетное бесконечное множество и является *мультипликативной*, ортогональной и полной в $L_2[0, T]$.

Нетрудно убедиться, что

$$\int_T \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq m, \\ \|\varphi_n\|^2 = T, & \text{при } n = m. \end{cases} \quad (1.4.9)$$

Поэтому для сигнала $x(t) \in L_2[0, T]$ коэффициенты Фурье по этой системе определяются следующим образом:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt. \quad (1.4.10)$$

Пространство, натянутое на базис $\{\varphi_n\}$, составляют T -периодические сигналы. Разложение сигналов по этим функциям называется разложением в ряд Фурье.

Для представления двумерных сигналов, заданных в прямоугольнике $[R_1, R_2]$, используется двумерный базис, определяемый в прямоугольных координатах через произведение одномерных базисных функций:

$$\varphi_{n,m}(r_1, r_2) = \exp \left[j2\pi \left(\frac{nr_1}{R_1} + \frac{mr_2}{R_2} \right) \right], \quad r_1 \in [0, R_1], \quad r_2 \in [0, R_2]. \quad (1.4.11)$$

Функции Уолша

Система Уолша $\{\text{wal}(n, \theta)\}$, где $\theta = \frac{t}{T}$ – безразмерное время и $t \in [0, T)$, была введена Уолшем (Walsh) в 1923 году как полная ортонормированная система функций в $L_2[0, 1)$, каждая из которых принимает значения ± 1 и обладает тем свойством, что ряд Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{wal}(n, \theta), \quad \text{где} \quad (1.4.12)$$

$$c_n = \int_0^1 x(\theta) \text{wal}(n, \theta) d\theta, \quad (1.4.13)$$

для непрерывной функции $x(\theta)$ равномерно сходится по подпоследовательности частичных сумм с номерами $N = 2^\nu$, ν – целое, положительное число. Характерным для нумерации Уолша является то, что число перемен знака у функции $\text{wal}(n, \theta)$ внутри интервала $[0, 1)$ равно n . Рассмотрим процедуру построения функции $\text{wal}(n, \theta)$. По определению

$$\text{wal}(0, \theta) = 1,$$

$$\text{wal}(n, 0) = 1 \quad \text{для всех } n.$$

Известно также, что функция $\text{wal}(n, \theta)$ или симметрична (если n – чётное), или антисимметрична (если n – нечётное) относительно оси, проходящей через точку $\theta = 1/2$. Таким образом, если n – четное, то в точке $\theta = 1/2$ знак не меняется, а если n – нечетное, то знак меняется. Смена знака у функций Уолша может происходить только в двоично-рациональных точках. Поэтому представим номер функции n в двоичном виде:

$$n = \sum_{i=0}^{\nu-1} n_i 2^i, \quad \text{где или } n_i = 0, \quad \text{или } n_i = 1, \quad n = (n_{\nu-1} \dots n_1 n_0).$$

Если $n_i = 1$, то должна происходить смена знака в точках

$$\theta = \frac{1}{2^{i+1}}, \frac{3}{2^{i+1}}, \frac{5}{2^{i+1}}, \dots, \left(1 - \frac{1}{2^{i+1}} \right).$$

Если $n_i = 0$, то в этих точках знаки остаются неизменными. Построим, например, функцию $\text{wal}(5, \theta)$.

Т. к. n – нечётное, то имеет место смена знака в точке $\theta = 1/2$.

Номер n в двоичном виде будет $n = (101)$. Коэффициент $n_2 = 1$, поэтому имеет место смена знаков в точках $\theta = 1/8, 3/8, 5/8, 7/8$. Функция $\text{wal}(5, \theta)$ изображена на рис. 1.4.2.

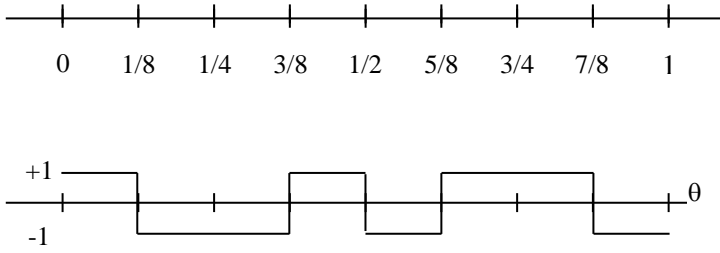
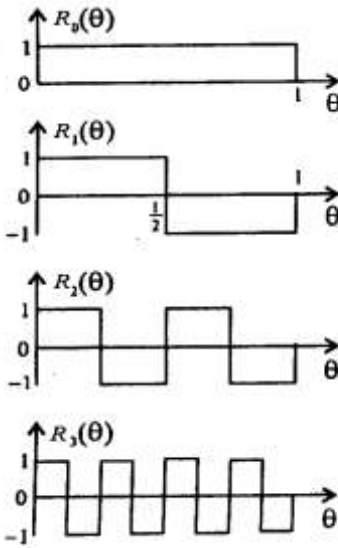


Рис. 1.4.2. Функция $wal(5, \theta)$ на интервале $[0, 1)$

В 1932 году Пэли (Paley) рассмотрел систему Уолша в другой нумерации. Обозначим её $pal(p, \theta)$. Функции $pal(p, \theta)$ определяются через функции Радемахера:

$$R_0(\theta) = 1, \quad R_i(\theta) = \text{sgn}(\sin 2^i \pi \theta), \quad (1.4.14)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, \theta \in [0, 1).$$



Первые четыре функции системы Радемахера приведены на рис. 1.4.3. Функции Радемахера нечетные на интервале $[0, 1)$; их называют еще *меандровыми функциями*, т. к. по виду они соответствуют меандровым сигналам в разрядах двоичного счетчика.

Функции Уолша–Пэли определяются через функции Радемахера следующим образом:

$$pal(p, \theta) = \prod_{i=0}^{v-1} R_{i+1}^{p_i}(\theta). \quad (1.4.15)$$

Здесь p_i – коэффициенты двоичного представления числа p :

$$p = \sum_{i=0}^{v-1} p_i 2^i, \text{ где } p_i = 0, \text{ либо } p_i = 1;$$

$$p = (p_{v-1} \dots p_1 p_0).$$

Рис. 1.4.3

Отсюда следует, что для $p = 2^i$ имеет место т. е. система Радемахера входит в систему Уолша. Системы Уолша и Уолша–Пэли получаются одна из другой путем перестановки функций внутри блоков с номерами $[2^{v-1}, 2^v - 1)$. Первые восемь функций этих систем изображены на рис. 1.4.4.

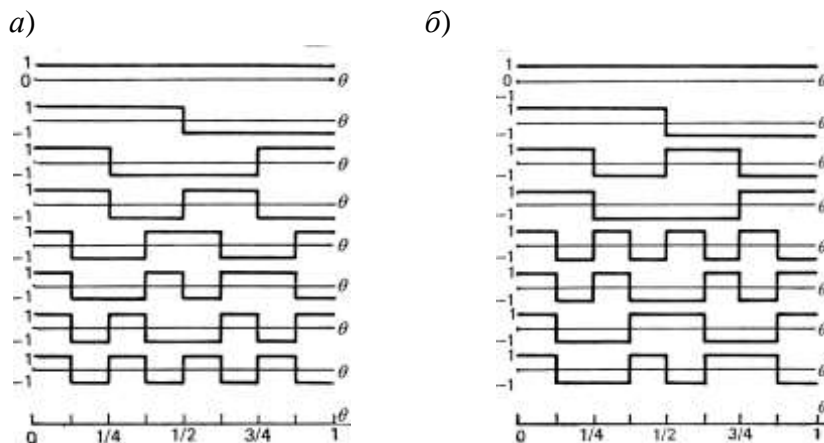


Рис. 1.4.4. Первые восемь функций Уолша: *а* – в нумерации Уолша; *б* – в нумерации Пэли

Для некоторых сигналов ряд Фурье по системе Уолша–Пэли сходится быстрее, чем по системе Уолша.

Расположение функций Уолша в нумерации Пэли связано с кодом Грея. Пусть n – номер функции $wal(n, \theta)$ в нумерации Уолша. Двоичное представление этого номера $n = (n_{\nu-1} \dots n_1 n_0)$. Тогда разрядные коэффициенты номера $p = (p_{\nu-1} \dots p_1 p_0)$ могут быть рассчитаны по формуле

$$p_i = n_i \oplus n_{i+1},$$

где \oplus означает сложение по модулю 2 (без переноса в старший разряд).

Функции Уолша *ортонормальны* на интервале $[0, 1)$. Система Уолша является *мультипликативной*. Однако при перемножении двух функций сдвиг по индексу не арифметический, а *диадный*, определяемый через поразрядное сложение по модулю 2:

$$wal(n, \theta)wal(m, \theta) = wal(n \oplus m, \theta). \tag{1.4.16}$$

Ещё одна разновидность функций Уолша $had(h, \theta)$ связана с нумерацией по Адамару. Переход от нумерации Пэли к нумерации по Адамару осуществляется путём разрядной инверсии в двоичном представлении номера p (младшие разряды зеркально меняются местами со старшими). Взаимосвязь различных нумераций показана в таблице 1.4.1.

Т а б л и ц а 1.4.1

n десятич.	n двоичн.	p двоичн.	p десятич.	h двоичн.	h десятич.
0	000	000	0	000	0
1	001	001	1	100	4
2	010	011	3	110	6
3	011	010	2	010	2
4	100	110	6	011	3
5	101	111	7	111	7
6	110	101	5	101	5
7	111	100	4	001	1

Функции Уолша могут быть периодически продолжены по оси θ с периодом 1.

Рассмотрим теперь частичную сумму ряда Уолша–Фурье:

$$S_N(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n wal(n, \theta), \tag{1.4.17}$$

где

$$c_n = \int_0^1 x(\theta) wal(n, \theta) d\theta.$$

При $N = 2^\nu$, где ν – целое положительное число, частичная сумма $S_N(\theta)$ является кусочно-ступенчатой функцией с интервалами постоянства длиной $1/N$, принимающей на этих интервалах значения, равные средним значениям сигнала $x(\theta)$:

$$S_N(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{x}_k \Pi_k(\theta), \tag{1.4.18}$$

где

$$\bar{x}_k = N \int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}} x(\theta) d\theta,$$

$$P_k(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{если } k/N \leq \theta \leq (k+1)/N, \\ 0, & \text{при других } \theta. \end{cases}$$

Кусочно-ступенчатая аппроксимация средними значениями приводит к среднеквадратичной ошибке:

$$\varepsilon^2(N) = \int_0^1 [x(\theta) - S_N(\theta)]^2 d\theta.$$

В [7] приводится простая инженерная формула для оценки этой ошибки при $N = 2^v$:

$$\varepsilon^2(N) = \frac{1}{12N^2} \int_0^1 [x'(\theta)]^2 d\theta + o\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad (1.4.19)$$

где $x'(\theta)$ – первая производная, а $o\left(\frac{1}{N^2}\right)$ – о малое от $1/N^2$.

Двумерные функции Уолша получают как произведение одномерных:

$$\text{wal}_{n,m}(\theta, \tau) = \text{wal}(n, \theta)\text{wal}(m, \tau). \quad (1.4.20)$$

Предполагается, что θ и τ заданы в прямоугольных координатах; $\theta \in [0, 1)$, $\tau \in [0, 1)$, как показано на рис. 1.4.5. Это делается для того, чтобы упростить вычисление коэффициентов представления сигналов по таким двумерным функциям. Вычисление двумерного интеграла скалярного произведения сводится к вычислению двух одномерных.

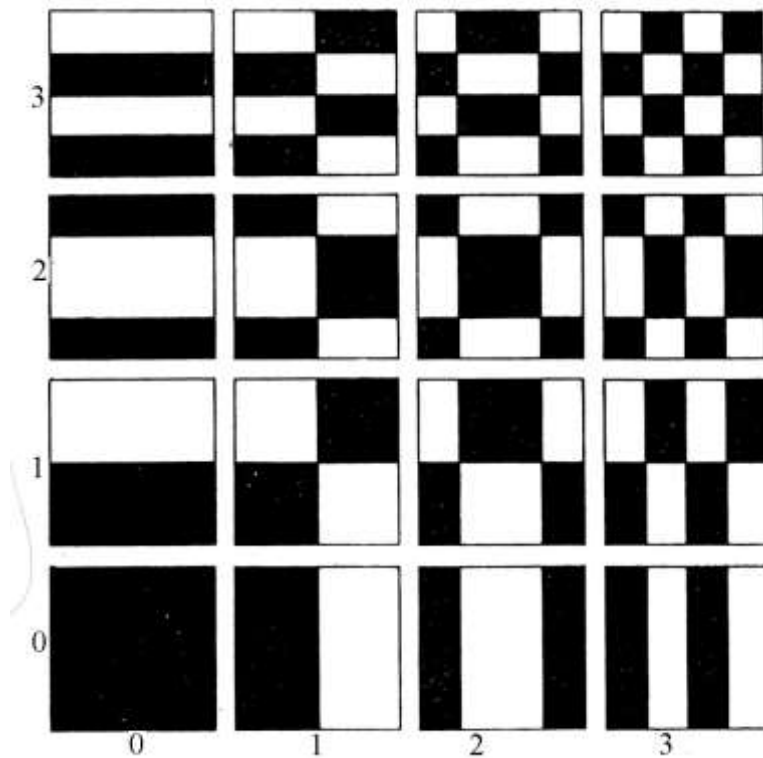


Рис. 1.4.5. Первые шестнадцать двумерных функций Уолша

Задачи для самостоятельного решения. Лекция 13 февраля 2018 г.

1. Изобразить первые шестнадцать функций Уолша:

a – в нумерации Уолша;

b – в нумерации Пэли.

2. Найти спектр функции отсчетов (1.4.5).

3. Доказать ортогональность функций отсчетов (1.4.2).

Указание. Воспользоваться обобщенным равенством Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f) df.$$