Примеры решения задач на ДВПФ

1. Найти ДВПФ периодической последовательности единичных импульсов $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} 1(k-m)$.

Решение.

$$X(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} 1(k-m)\right]e^{-j2\pi\nu k}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 1(k-m)e^{-j2\pi\nu k}.$$

С учетом теоремы запаздывания ДВПФ имеем

$$X(\nu)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\nu m}.$$

Это есть ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности δ - функций с периодом 1. Действительно

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\nu-n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m}\, e^{-j2\pi\nu m},$$

где коэффициенты Фурье

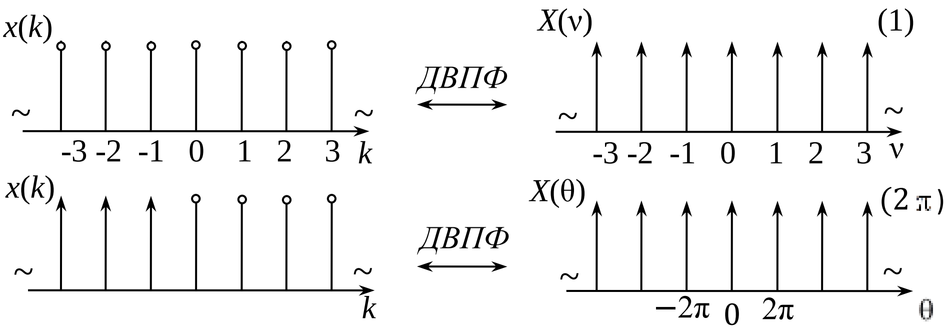
$$C_{-m}=\int_{-1/2}^{1/2}\delta(\nu)e^{\,j2\pi\nu m}d\nu\equiv 1.$$

Таким образом,

$$X(\nu)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\nu m}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\nu-n).$$

Для $\theta=\omega\Delta t=2\pi f\,\Delta t=2\pi\nu$

$$X(\theta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\theta}=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\theta-2\pi n).$$



2. Гармонический сигнал $x(t)=\cos 2\pi f_0 t$ дискретизуется так, что на периоде образуется 8 отсчетов, $\omega_0\Delta t=\pi/4$ или $\nu_0=1/8$.

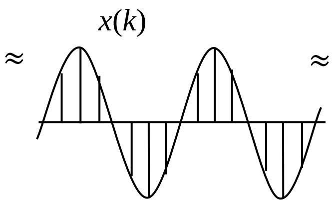
1. Изобразить последовательность $x(k)$ и ее спектр.
2. Найти и изобразить по модулю ДВПФ последовательности

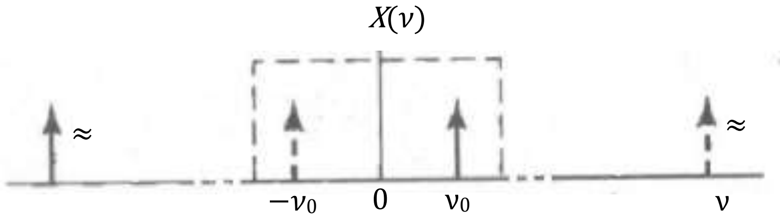
$$y(k)=\sum_{m=0}^{15} x(m)\mathbf{1}(\mathrm{k}-\mathrm{m}).$$

Решение 1. Представим косинусоиду в виде

$$x(k) = \cos 2\pi f_0 k \Delta t = \cos 2\pi \nu_0 k,$$

где $\nu_0 = f_0 \Delta t = f_0 / f_д$ – частота косинусоиды, нормированная к частоте дискретизации (доли частоты дискретизации). Спектр дискретизованной косинусоиды – две дельта-функции (с весом 1/2) в точках $\pm\nu_0$, повторяющиеся с периодом 1.



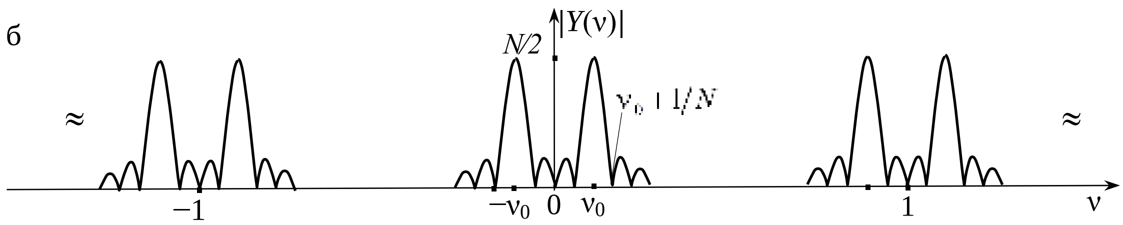


Решение 2. Последовательность $y(k)$ представляет собой отрезок из двух периодов косинусоиды. С учетом того, что $\cos 2\pi\nu_0 k = \frac{1}{2}\exp(j2\pi\nu_0 k) + \frac{1}{2}\exp(-j2\pi\nu_0 k)$ можем записать для ДВПФ последовательности $y(k)$

$$Y(\nu) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi(\nu+\nu_0)k}\right] + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi(\nu-\nu_0)k}\right] =$$

$$= e^{-j\pi(\nu+\nu_0)(N-1)} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sin\pi(\nu+\nu_0)N}{\sin\pi(\nu+\nu_0)} + e^{-j\pi(\nu-\nu_0)(N-1)} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sin\pi(\nu-\nu_0)N}{\sin\pi(\nu-\nu_0)}.$$

Модуль этой функции изображен на рисунке для *N*=16.



3. Доказать, что ДВПФ последовательности единичных импульсов с периодом L

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL)$$

есть последовательность δ-функций с периодом $1/L$ (площади равны $1/L$)

$$(1/L)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n/L).$$

Решение.

Обозначим

$$x(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \text{ и } x_1(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-mL).$$

Последовательность $x_1(k)$ получается, если между каждой парой отсчётов последовательности $x(k)$ вставить $L-1$ нулей. Для случая $L=3$ это иллюстрируется на рис. 3.1.

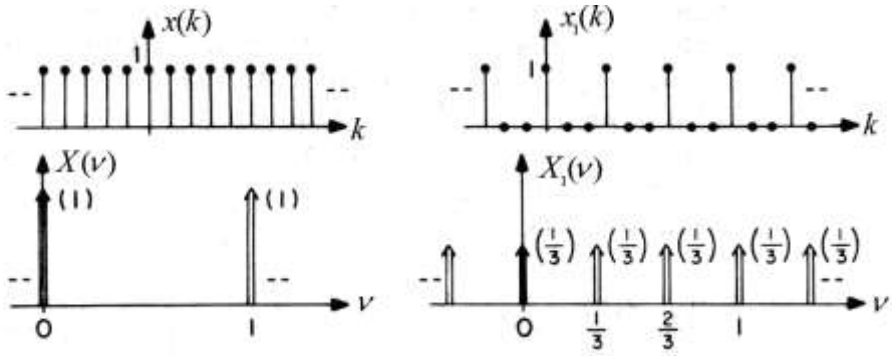


Рис. 3.1

Вычисление ДВПФ дает (с учётом теоремы запаздывания)

$$X_1(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-mL)\, e^{-j2\pi\nu k} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-mL)\, e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\nu Lm}.$$

Это есть ряд Фурье (по оси ν) периодической последовательности δ-функций с площадями и периодом $1/L$. Действительно

Действительно

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - m/L) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{-n}\, e^{-j2\pi\nu Ln},$$

где коэффициенты Фурье

$$C_{-n} = \frac{1}{L} \int_{-1/2}^{1/2} \delta(\nu)\, e^{j2\pi\nu Ln} d\nu = \frac{1}{L}.$$

Следовательно

$$X_1(\nu) = (1/L) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n/L).$$

Для случая $L=3$ это иллюстрируется на рис. 3.1.

4. Теорема об изменение масштаба для ДПФ:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(m)\, \mathbf{1}(k-mL) \Leftrightarrow X(\nu L).$$

Решение.

В качестве примера рассмотрим последовательность $x(k)$ из пяти отсчётов одиночного прямоугольного импульса. ДВПФ этой последовательности

$$X(\nu)=\sum_{k=-2}^{2}x(k)e^{-j2\pi\nu k}=\sum_{k=-2}^{2}e^{-j2\pi\nu k}=e^{j4\pi\nu}\,\frac{1-e^{-j2\pi\nu 5}}{1-e^{-j2\pi\nu}}=e^{j4\pi\nu}\,\frac{e^{-j\pi\nu 5}}{e^{-j\pi\nu}}\cdot\frac{\sin\pi\nu 5}{\sin\pi\nu}=$$
$$=\frac{\sin\pi 5\nu}{\sin\pi\nu}.$$

Таким образом, ДВПФ последовательности из N = 5 отсчетов прямоугольного импульса представляется выражением

$$X(\nu)=\frac{\sin\pi N\nu}{\sin\pi\nu}=\frac{\sin 5\pi\nu}{\sin\pi\nu}$$

и изображено на рис. 4.1*а* справа. Функция $X(\nu)$ периодична с периодом, равным 1.

а)

б)

Рис. 4.1

Образуем новую последовательность $y(k)$ путем добавления L–1 нулей между каждой парой отсчетов $x(k)$:

$$y(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\,\mathbf{1}(k-mL).$$

Эта последовательность показана на рис. 4.1*б* для случая $L=2$.

Новая последовательность с измененным масштабом имеет ДВПФ

$$Y(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}y(k)\,e^{-j2\pi\nu k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\;\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\,\mathbf{1}(k-mL)\,e^{-j2\pi\nu k}=$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{1}(k-mL)\,e^{-j2\pi\nu k}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\,e^{-j2\pi\nu mL}=X(\nu L).$$

Функция $Y(\nu)$ периодична с периодом $1/L$ и сжата по оси ν в L раз. Случай $L=2$ изображен на рис. 4.1.*б*.

5. Пример применения теоремы о свертке для ДВПФ.

Рассмотрим прямоугольное окно

$$w(k)=\begin{cases}1, & |k|\le N/2,\\ 0, & |k|>N/2.\end{cases}$$

ДВПФ этого временного окна (см. предыдущую задачу)

$$W(f)=\Delta t\sum_{k=-N/2}^{N/2} e^{-j2\pi fk\Delta t}=\Delta t\frac{\sin\pi(N+1)f\Delta t}{\sin\pi f\Delta t}$$

при больших N ведёт себя как функция $\sin x/x,$ имеющая пульсирующий характер из-за наличия боковых лепестков.

Рассмотрим теперь треугольное окно

$$w_1(k)=\begin{cases}1-\dfrac{|k|}{N}, & |k|\le N,\\ 0, & |k|>N,\end{cases}$$

которое получается свёрткой двух прямоугольных окон каждое длительностью в $N+1$ отсчётов:

$$w_1(k)=\left(\frac{1}{(N+1)}\right)\sum_{m=-N/2}^{N/2} w(m)w(k-m).$$

Нормирующий множитель $\dfrac{1}{(N+1)}$ в формуле свертки необходим, чтобы выполнялось условие $w_1(0)=1.$

По теореме о свёртке ДВПФ треугольного окна

$$W_1(f)=\Delta t\sum_{k=-N}^{N} w_1(k)e^{-j2\pi fk\Delta t}=\frac{\Delta t}{N+1}\left(\frac{\sin\pi(N+1)f\Delta t}{\sin\pi f\Delta t}\right)^2$$

По сравнению с прямоугольным, треугольное спектральное окно имеет меньший уровень боковых лепестков.

Задачи к лекции 13 марта 2018 г.

1. Пусть $x(k)$ – финитная последовательность

$$x(k)=\{2\quad 1\quad -1\quad 0\quad 3\quad 2\quad 0\quad -3\quad 4\},$$
$$\uparrow k=0,$$

имеющая ДВПФ $X(\nu)$. Вычислить следующие функции от $X(\nu)$, не вычисляя самого ДВПФ:

а) $X(0)$; б) $X(1/2)$; в) $\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)d\nu$; г) $\int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu$; д) $\int_{-1/2}^{1/2}\left|\frac{dX(\nu)}{d\nu}\right|^2 d\nu.$

2. Определить и изобразить по модулю ДВПФ для последовательности

$$x(k)=\cos\left(\frac{2\pi}{N}4k\right),\quad 0\le k\le 15.$$

Следующие задачи полезны для подготовки к курсовой работе

- Теорема Котельникова (случай нефинитного спектра).
- Найти и изобразить ДВПФ 16 - точечных последовательностей

$$x(k) = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}(\mathrm{k} - \mathrm{m}) \text{ и } y(k) = x(k)\cos(2\pi 6k / N).$$

- Найти и изобразить по модулю дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ) для последовательности $x(k) = \cos\dfrac{\pi k}{4}$ $, -\infty < k < \infty$. Изобразить спектр новой последовательности

$$y(k) = \sum_{m=0}^{15} x(m)\mathbf{1}(\mathrm{k} - m).$$

- Теорема Котельникова в частотной области.
- Спектр идеально дискретизованного сигнала.
- Найти ДВПФ последовательности

$$x(k) = a^k u\left(k - 5\right),$$

где $|a| < 1,\ \ u\left(k\right) -$ дискретная функция включения.

- Определить обратное ДВПФ для функции $X(\theta) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \cos\theta n, \quad \theta = \omega\Delta t$.
- Теорема об изменении временного масштаба для ДВПФ. В качестве иллюстрации использовать последовательность из 10 отсчётов прямоугольного импульса.
- Доказать ортогональность функций отсчетов

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin 2\pi\, f_в (t - k\Delta t)}{2\pi\, f_в (t - k\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{1}{2 f_в},$$ на бесконечном интервале $(-\infty,\ \infty)$.

- Определить спектр функции отсчетов.