

Представление сигналов в комплексной форме

Снова обратимся к блок-схеме устройства обработки сигналов (УОС), представленной на рис. 1. Устройство содержит аналоговую часть и цифровой процессор сигналов.

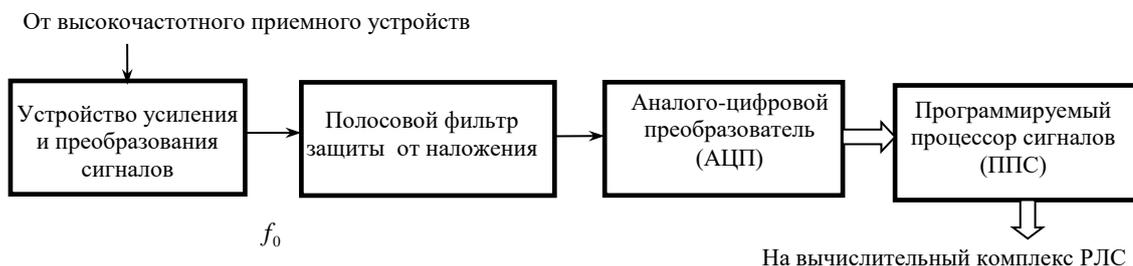


Рис. 1. Блок-схема устройства обработки сигналов (УОС)

Аналоговая часть включает в себя каскады управляемого усиления, полосовой фильтр для формирования полосы частот обрабатываемых сигналов и соблюдения условий *теоремы Котельникова*, а также аналого-цифровой преобразователь (АЦП). АЦП формирует цифровые отсчеты сигналов, т.е. выполняет дискретизацию сигналов по времени и квантование отсчетов по уровню. Благодаря ограничению полосы частот возникающее после АЦП повторение спектра происходит без заметного наложения. Однако «*эффект наложения*» принципиально неустраним, его можно только ослабить соответствующим выбором аналогового фильтра. Для дальнейшего важно отметить, что «*эффект наложения*» понижает динамический диапазон и степень этого понижения в каждом конкретном случае необходимо оценивать.

Несмотря на то, что основная обработка производится в ППС, аналоговый блок является весьма ответственным узлом, определяющим многие важные характеристики устройства в целом, такие, как *чувствительность, динамический диапазон, максимальная полоса частот* обрабатываемых сигналов. Более того, на сегодняшнем уровне развития элементной базы именно эта часть аппаратуры ограничивает предельно достижимые характеристики УОС. Качество аналого-цифрового преобразования оказывает значительное влияние на алгоритмы, используемые при дальнейшей цифровой обработке. Поэтому аналоговый блок и ППС целесообразно проектировать совместно, оптимизируя характеристики всего УОС.

Принципиальным является способ построения аналого-цифрового преобразователя (АЦП). От этого зависит выбор эффективного алгоритма при дальнейшей обработке в ППС. Различные методы построения АЦП соответствуют различным способам представления сигналов. Можно выделить два основных способа представления: действительное и комплексное. Представление сигналов в комплексной форме в свою очередь разделяется на два: одно связано с формированием квадратурных компонент сигнала, другое – с формированием аналитического сигнала с помощью преобразователя Гильберта.

Рассмотрим узкополосный сигнал, у которого спектр ограничен полосой частот $|f| \in [f_0 - f_e, f_0 + f_e]$, причем $f_0 \gg 2f_e$ (рис. 1).

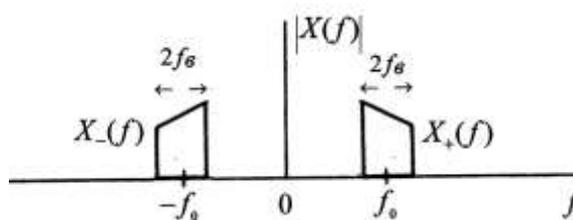


Рис. 1

Здесь $X_+(f)$ и $X_-(f)$ прямой и инверсный спектры сигнала соответственно.

Примером является сигнал с амплитудной и фазовой модуляцией

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)], \quad (1)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ – медленно меняющиеся по сравнению с циклическим множителем функции времени. Это наиболее общая форма записи узкополосного колебания. Гармонический сигнал (косинусоида с постоянной частотой f_0 и начальной фазой φ_0) подвергается одновременно амплитудной и фазовой модуляции. Узкополосные сигналы можно считать квазигармоническими – их амплитуда и фаза медленно изменяются во времени.

В соответствии с теоремой Котельникова для такого сигнала необходимая частота дискретизации

$$f_d = 2(f_0 + f_s)$$

может оказаться очень высокой (за пределами быстродействия аналого-цифрового преобразователя). Равномерная дискретизация с шагом $\Delta t = 1/4f_s$ оказывается недостаточной,

т. к. составляющие $X_+(f)$ и $X_-(f)$ при периодическом продолжении с периодом $f_d = 4f_s$ будут налагаться друг на друга, в результате частичные спектры будут отличаться от исходного и точное восстановление сигнала по его дискретным отсчетам становится невозможным. Тем не менее для полосовых сигналов существуют методы дискретизации с частотой $4f_s$, которые позволяют сохранить информацию, необходимую для восстановления исходного сигнала. Дальнейшее изложение основывается на комплексном представлении сигналов.

Представление узкополосных радиосигналов в комплексной форме.

Комплексная огибающая

Рассмотрим узкополосный радиосигнал, у которого, спектр ограничен полосой частот причём $f_0 \gg 2f_s$ (рис.1).

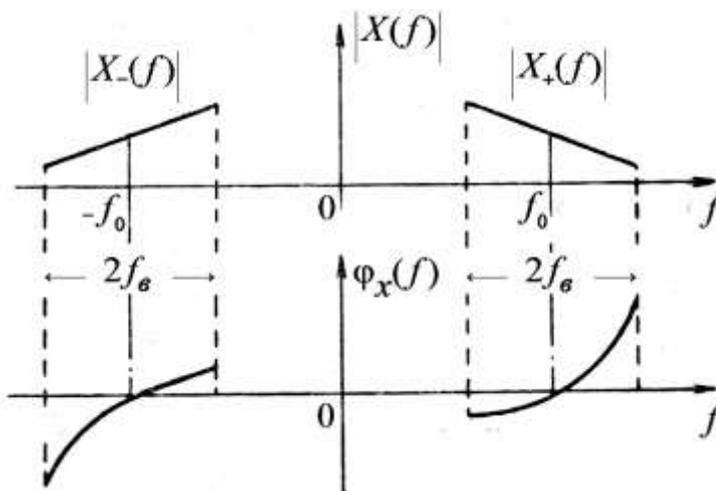


Рис. 1

Наиболее общая форма записи такого сигнала имеет вид

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)], \quad (1)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ – медленно меняющиеся по сравнению с циклическим множителем функции времени. Гармонический сигнал (косинусоида с постоянной частотой f_0 и начальной фазой φ_0) подвергается одновременно амплитудной и фазовой модуляции. Узкополосные сигналы можно считать квазигармоническими – их амплитуда и фаза медленно изменяются во времени по сравнению с $\cos[2\pi f_0 t]$.

Комплексное представление полосовых сигналов является прямым развитием известного символического метода, позволяющего представлять гармоническое колебание как действительную или мнимую часть комплексной функции:

$$A \cos[2\pi f_0 t + \varphi_0] = \operatorname{Re}(Ae^{j\varphi_0} e^{j2\pi f_0 t}),$$

$$A \sin[2\pi f_0 t + \varphi_0] = \operatorname{Im}(Ae^{j\varphi_0} e^{j2\pi f_0 t}).$$

Величину $Ae^{j\varphi_0}$ называют комплексной амплитудой гармонического колебания.

В соответствии с (1) полосовой радиосигнал представляет собой сложное колебание, получающееся из гармонического сигнала с частотой f_0 при одновременной его модуляции как по амплитуде, так и по фазе. Мы попытаемся корректно распространить символический метод на такие колебания. Для этого (1) представим в виде

$$x(t) = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t. \quad (2)$$

Здесь

$$x_c(t) = A(t) \cos \varphi(t) \text{ и } x_s(t) = A(t) \sin \varphi(t) \quad (3)$$

называются *квадратурными составляющими* узкополосного колебания $x(t)$, соответственно $x_c(t)$ – синфазная, а $x_s(t)$ – квадратурная компоненты. Квадратурные составляющие являются низкочастотными действительными функциями и несут всю информацию о модуляции сигнала. Спектры этих функций сконцентрированы возле начала координат в полосе $2f_a$.

Квадратурные компоненты могут быть получены в следующей схеме.

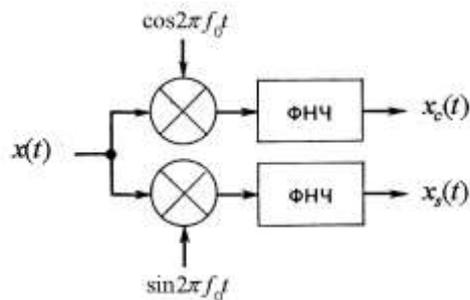


Рис. 2. Получение квадратурных компонент узкополосного колебания

Действительно, после умножения на сигнал когерентного гетеродина в верхнем канале имеем

$$x(t) \cos 2\pi f_0 t = (1/2)[x_c(t) \cos 2\pi 2f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi 2f_0 t] + 1/2 x_c(t).$$

Высокочастотные составляющие вблизи $2f_0$ подавляются фильтром нижних частот (ФНЧ) и на выходе верхнего канала остается синфазная компонента $x_c(t)$. Аналогично в нижнем канале выделяется квадратурная компонента $x_s(t)$.

В реальных формирователях квадратур предъявляются очень высокие требования к идентичности, линейности и стабильности амплитудных характеристик каналов, а также к точному соблюдению 90° сдвига фаз между гармоническими колебаниями когерентного гетеродина.

Амплитудную и фазовую модуляции сигнала $x(t)$ можно определить с помощью квадратурных компонент. Из (3) имеем

$$A(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)},$$

$$\varphi(t) = \arctg \frac{x_s(t)}{x_c(t)}. \quad (4)$$

Ветвь арктангенса выбирается таким образом, чтобы $\varphi(t)$ была непрерывной функцией времени.

Введём комплексную огибающую

$$\gamma(t) = x_c(t) + jx_s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}. \quad (5)$$

Эта функция содержит всю обусловленную модуляцией информацию. При этом физическая огибающая равна

$$A(t) = |\gamma(t)|.$$

Полная фаза узкополосного колебания

$$\psi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(t),$$

а мгновенная частота определяется как производная по времени от полной фазы:

$$\begin{aligned} f(t) &= f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arctg \frac{x_s}{x_c} = \\ &= f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{x'_s x_c - x'_c x_s}{x_c^2 + x_s^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Комплексную огибающую можно представить на комплексной плоскости вектором, который совершает некоторое сложное движение, изменяясь как по модулю, так и по направлению (рис. 3). Исходный действительный сигнал $x(t)$ связан с комплексной огибающей $\gamma(t)$ соотношением

$$x(t) = \text{Re}[\gamma(t) e^{j2\pi f_0 t}]. \quad (7)$$

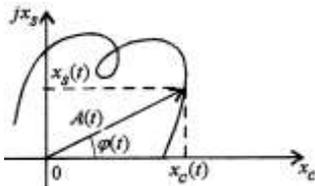


Рис. 3

Таким образом, понятие комплексной огибающей обобщает понятие комплексной амплитуды на случай узкополосных радиосигналов.

Спектр комплексной огибающей

Полосовой сигнал $x(t)$ вида (1) является действительной функцией времени, поэтому для его спектральной функции имеет место

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = |X(f)| e^{j\varphi_x(f)},$$

$X(f) = X^*(-f)$ – свойство комплексной сопряжённости, причём

$$|X(f)| = |X(-f)|, \quad \varphi_x(-f) = -\varphi_x(f),$$

т. е. амплитудный спектр сигнала является чётной функцией частоты, а фазовый – нечётной функцией (рис.1).

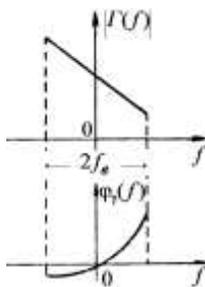


Рис. 4.

Преобразование Фурье комплексной огибающей этого сигнала

$$\Gamma(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) e^{-j2\pi f t} dt = |\Gamma(f)| e^{j\varphi_\gamma(f)}.$$

Умножение $\gamma(t)$ на $e^{j2\pi f_0 t}$ означает смещение спектра $\gamma(t)$ вправо на величину f_0 (теорема смещения для преобразования Фурье).

С учётом этого и выражения (7) имеем

$$X(f) = \frac{1}{2} \Gamma(f - f_0) + \frac{1}{2} \Gamma^*[-(f + f_0)]. \quad (8)$$

Отсюда прямой и инверсный спектры сигнала будут

$$\begin{aligned} X_+(f) &= \frac{1}{2} \Gamma(f - f_0), \\ X_-(f) &= \frac{1}{2} \Gamma^*[-(f + f_0)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Амплитудный спектр $|G(f)|$ и фазовый спектр $\varphi_\gamma(f)$ комплексной огибающей $\gamma(t)$ полосового сигнала изображены на рис. 4. Можно отметить несимметричность амплитудного спектра комплексной огибающей на интервале $[-f_s, f_s]$.

Аналитический сигнал. Преобразование Гильберта

Рассмотрим еще один распространенный способ комплексного представления действительных колебаний. Построим *аналитический сигнал*

$$x_A(t) = \text{Re}[x_A(t)] + j \text{Im}[x_A(t)],$$

у которого

$$\begin{aligned} \text{Re}[x_A(t)] &= x(t), \\ \text{ПФ}[x_A(t)] = X_A(f) &= \begin{cases} 2X_+(f), & f > 0, \\ 0, & f < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

т. е. вещественная часть равна исходному действительному сигналу, а спектр содержит только положительные частоты. Нетрудно видеть, что

$$X_A(f) = X(f) + X(f) \text{sgn} f, \quad (11)$$

где

$$\text{sgn} f = \begin{cases} 1, & f > 0, \\ -1, & f < 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $\text{ПФ}[\text{sgn} f] = j/\pi t$, из (11) имеем

$$\begin{aligned} x_A(t) &= \text{ПФ}[X_A(f)] = \text{ПФ}[X(f)] + \text{ПФ}[X(f)\text{sgn} f] = \\ &= x(t) + j[x(t) \otimes (1/\pi t)]. \end{aligned}$$

Свёртка

$$x(t) \otimes (1/\pi t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau = x_r(t) \quad (12)$$

по определению есть *преобразование Гильберта* функции $x(t)$.

Таким образом, аналитический сигнал со спектром (10) будет

$$x_A(t) = x(t) + jx_r(t), \quad (13)$$

где $x_r(t)$ определяется из(12), т. е.

$$x_r(t) = x(t) \otimes (1/\pi t) \Leftrightarrow X_r(f) = -jX(f)\text{sgn} f. \quad (14)$$

Из этого выражения вытекает ещё одна связь между спектрами:

$$X(f) = jX_r(f)\text{sgn} f,$$

из которой следует *обратное преобразование Гильберта*:

$$x(t) = x_r(t) \otimes (-1/\pi t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau. \quad (15)$$

Замечание. Выражение под интегралом (12) и (15) имеет особую точку $\tau = t$, поэтому интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{t-\tau} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{x(\tau) d\tau}{t-\tau} + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{t-\tau} \right].$$

Некоторые свойства преобразования Гильберта

Отметим прежде всего свойство *линейности* этого интегрального преобразования, в чём легко можно убедиться непосредственно из (12) и (15).

Выражению (12) можно дать следующую интерпретацию: преобразованный по Гильберту сигнал получается пропусканием исходного действительного сигнала через фильтр с импульсной характеристикой $1/\pi t$ (с частотной характеристикой $-j\text{sgn} f$) (рис. 5).

Такой фильтр осуществляет сдвиг по фазе всех гармонических компонент сигнала в сторону отставания на 90° .

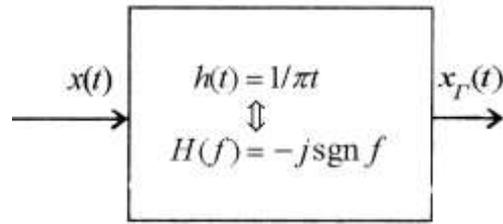


Рис. 5. Преобразователь Гильберта

Действительно, легко проверить, что для $x(t) = \cos 2\pi f t$ имеем $x_r(t) = \sin 2\pi f t$, а для $x(t) = \sin 2\pi f t$ имеем $x_r(t) = -\cos 2\pi f t$. Следовательно, если

$$x(t) = \sum_n (a_n \cos 2\pi f_n t + b_n \sin 2\pi f_n t),$$

то

$$x_r(t) = \sum_n (a_n \sin 2\pi f_n t - b_n \cos 2\pi f_n t).$$

Такие колебания называются *сопряжёнными по Гильберту*.

Для произвольных сигналов преобразователь Гильберта нереализуем, т.к. его импульсная характеристика не является каузальной. Однако его можно реализовать приближённо с некоторой задержкой t_0 , если отбросить ветви $h(t)$ левее точки $t = -t_0$ и правее точки $t = t_0$ и сдвинуть $h(t)$ вправо на t_0 . Погрешности преобразования, связанные с таким усечением импульсной характеристики, могут быть значительными. Кроме того, задержка сигнала на t_0 должна быть учтена при работе преобразователя с другими устройствами. Нереализуемость преобразователя Гильберта объяснить можно также тем, что сдвиг фаз на $-\pi/2$ для всех компонент сигнала практически не может быть выполнен точно. Для узкополосных радиосигналов такая операция выполняется тем точнее, чем уже полоса, т. е. чем сильнее неравенство $f_0 > 2f_s$.

Из (2) и (7) имеем

$$x(t) = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t = \text{Re}[\gamma(t) e^{j2\pi f_0 t}].$$

Умножение $\gamma(t)$ на $e^{j2\pi f_0 t}$ означает перенос спектра $\gamma(t)$ вправо на величину f_0 . При достаточной узкополосности сигнал $\gamma(t) e^{j2\pi f_0 t}$ будет иметь односторонний спектр с положительными частотами и может рассматриваться как аналитический. Поэтому сопряжённый по Гильберту сигнал

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \text{Im}[\gamma(t) e^{j2\pi f_0 t}] = x_c(t) \sin 2\pi f_0 t + x_s(t) \cos 2\pi f_0 t = \\ &= x_c(t) \cos(2\pi f_0 t - \pi/2) - x_s(t) \sin(2\pi f_0 t - \pi/2). \end{aligned}$$

Сравнивая выражения для $x(t)$ и $x_r(t)$, видим, что при $f_0 \gg 2f_s$ преобразование Гильберта выполняется над $\cos 2\pi f_0 t$ и $\sin 2\pi f_0 t$, а квадратурные компоненты $x_c(t)$ и $x_s(t)$ остаются неизменными. Ядро преобразования Гильберта является нечётной функцией аргумента τ относительно точки $\tau = t$. Следовательно, сигнал, сопряжённый к константе, тождественно равен нулю:

$$x_r(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{const}}{t - \tau} d\tau = 0.$$

Следствием этого является следующее важное свойство преобразования Гильберта: если сигнал $x(\tau)$ достигает экстремума при каком-то $\tau = t$, то в окрестности этой точки сопряжённый сигнал $x_r(t)$ проходит через нуль. Это объясняется тем, что в окрестности экстремума сигнал является чётной функцией.

Возьмём спектр аналитического сигнала и сдвинем его так, чтобы он оказался сконцентрированным около нулевой частоты:

$$\Gamma(f) = X_A(f + f_0). \quad (16)$$

Этому спектру соответствует колебание

$$\gamma(t) = x_A(t) \exp(-j2\pi f_0 t),$$

которое называется *комплексной огибающей* действительного сигнала $x(t)$. Следовательно:

$$x_A(t) = \gamma(t) \exp(j2\pi f_0 t) \quad (17)$$

и

$$x(t) = \text{Re}[\gamma(t) \exp(j2\pi f_0 t)]. \quad (18)$$

Во многих случаях частоту f_0 выбрать нетрудно. Например, для узкополосного сигнала (1) за f_0 принимается частота немодулированного несущего колебания. В этом случае

$$|x_A(t)| = \sqrt{x^2(t) + x_I^2(t)}$$

при достаточной узкополосности совпадает с

$$A(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}.$$

В других случаях f_0 выбирается так, чтобы минимизировать ширину полосы $\Gamma(f)$. Один из способов состоит в выборе f_0 «центра тяжести» положительной функции $|X_A(f)|^2$.

Такое f_0 минимизирует величину $\int_{-\infty}^{\infty} (f - f_0)^2 |X_A(f)|^2 df$. Рис.6 поясняет взаимосвязь спектров

действительного полосового сигнала, соответствующего аналитического сигнала и комплексной огибающей.

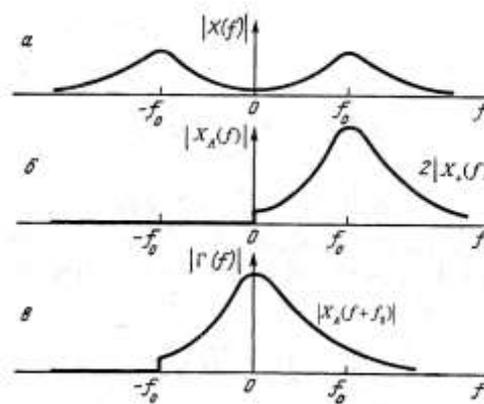
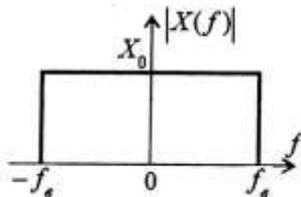


Рис. 6. Спектры

a – полосового сигнала; b – аналитического сигнала;
 c – комплексной огибающей

Пример 1. Рассмотрим действительный низкочастотный сигнал $x(t)$ со спектром $X(f)$, показанным на рисунке. Соответствующий аналитический сигнал имеет спектр



$$X_A(f) = \begin{cases} 2X_+(f), & f > 0, \\ 0, & f < 0, \end{cases}$$

поэтому

$$x_A(t) = 2X_0 \int_0^{f_e} e^{j2\pi ft} df = \frac{X_0}{j\pi t} (e^{j2\pi f_e t} - 1).$$

Отсюда

$$x(t) = \text{Re}[x_A(t)] = X_0 2f_e \sin 2\pi f_e t / 2\pi f_e t,$$

$$x_I(t) = \text{Im}[x_A(t)] = X_0 2f_e \sin^2(\pi f_e t) / (\pi f_e t).$$

На рис. 7 приведены графики этих сигналов, нормированных по амплитуде. Следует отметить, что сопряжённый сигнал обращается в нуль в точке, где исходный сигнал достигает максимального значения.

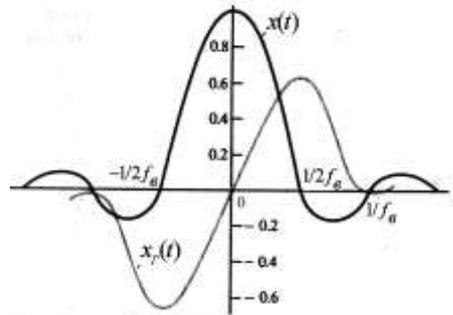
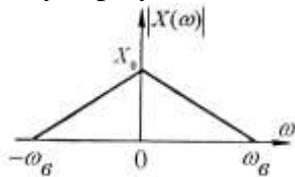


Рис. 7. Исходный и сопряжённый сигналы

Лекция 18 сентября 2017г. Задачи для самостоятельного решения

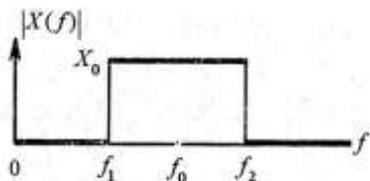
1. Показать, что квадратурные компоненты $x_c(t)$ и $x_s(t)$ сопряжены по Гильберту лишь при условии, что они соответствуют аналитическому сигналу $x(t)$, содержащему только положительные частоты.

2. Сигнал $x(t)$ является суммой двух гармонических компонент $x(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$. Найти сопряжённый по Гильберту сигнал, аналитический сигнал, физическую огибающую, полную фазу, мгновенную частоту.



3. Сигнал $x(t)$ имеет финитный спектр $X(\omega)$, показанный на рисунке слева. Найти соответствующий аналитический сигнал. Изобразить его действительную и мнимую части.

4. Найти комплексную огибающую импульса включения гармонической ЭДС $x(t) = A \sin 2\pi f_0 t, t \geq 0$.



5. Найти аналитический сигнал $x_A(t)$, соответствующий колебанию, спектр которого отличен от нуля лишь на отрезке $f_1 \leq f \leq f_2$ при $f > 0$.

6. Пусть $x_r(t)$ преобразованный по Гильберту сигнал $x(t)$. Показать, что $x_r(t)$ и $x(t)$ ортогональны, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x_r^*(t) dt = 0,$$

Примеры решения задач на ДВПФ

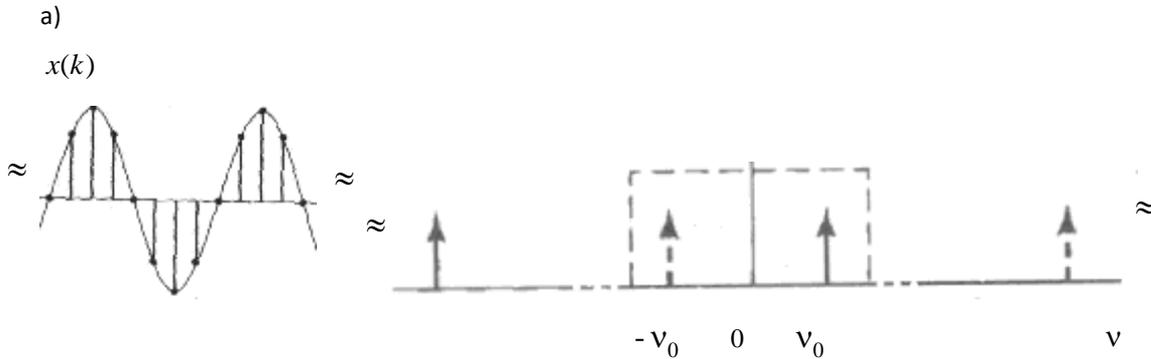
Пример 1. Гармонический сигнал $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$ дискретизируется так, что на периоде образуется 8 отсчетов.

а) Изобразить последовательность $x(k)$ и ее спектр.

б) Найти и изобразить по модулю ДВПФ последовательности

$$y(k) = \sum_{m=0}^{15} x(m)\mathbf{1}(k-m).$$

Решение а. $x(k) = \cos 2\pi f_0 k \Delta t = \cos 2\pi \nu_0 k$, $\nu_0 = f_0 \Delta t = f_0 / f_d$ – частота косинусоиды, нормированная к частоте дискретизации (доли частоты дискретизации). Спектр дискретизованной косинусоиды – две дельта-функции (с весом $1/2$), повторяющиеся с периодом 1.

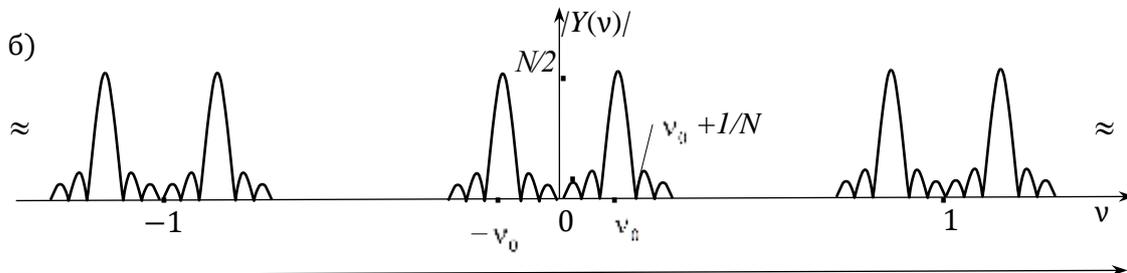


Решение б. Последовательность $y(k)$ представляет собой отрезок из двух периодов косинусоиды. С учетом того, что $\cos 2\pi \nu_0 k = \frac{1}{2} \exp(j2\pi \nu_0 k) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi \nu_0 k)$ можем записать для ДВПФ последовательности $y(k)$

$$Y(\nu) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi(\nu+\nu_0)k} \right] + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi(\nu-\nu_0)k} \right] =$$

$$= e^{-j\pi(\nu+\nu_0)(N-1)} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin \pi(\nu+\nu_0)N}{\sin \pi(\nu+\nu_0)} + e^{-j\pi(\nu-\nu_0)(N-1)} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin \pi(\nu-\nu_0)N}{\sin \pi(\nu-\nu_0)}.$$

Модуль этой функции изображен на рис. б. Здесь $N=16$.



Пример 2. Найти и изобразить по модулю ДВПФ N -точечных последовательностей

а) $x(k) = \sum_{m=0}^{N-1} 1(k-m)$ и б) $y(k) = x(k) \cos\left(\frac{2\pi l k}{N}\right)$.

Решение а.

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi \nu k} \right] = \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi \nu k} \right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j2\pi \nu m} = \frac{1 - e^{-j2\pi \nu N}}{1 - e^{-j2\pi \nu}} = e^{-j2\pi \nu(N-1)} \cdot \frac{\sin \pi \nu N}{\sin \pi \nu}.$$

Модуль этой функции изображен на рис. а.

Решение б.

$$Y(\nu) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi\left(\nu+\frac{l}{N}\right)k} \right] + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi\left(\nu-\frac{l}{N}\right)k} \right] =$$

$$= e^{-j\pi\left(\nu+\frac{l}{N}\right)(N-1)} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sin \pi\left(\nu+\frac{l}{N}\right)N}{\sin \pi\left(\nu+\frac{l}{N}\right)} + e^{-j\pi\left(\nu-\frac{l}{N}\right)(N-1)} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sin \pi\left(\nu-\frac{l}{N}\right)N}{\sin \pi\left(\nu-\frac{l}{N}\right)}.$$

Модуль этой функции изображен на рис. б.

