

Методы преобразования узкополосных радиосигналов из аналоговой формы в цифровую

Рассмотрим действительный узкополосный сигнал, у которого спектр ограничен полосой частот $|f| \in [f_0 - f_\epsilon, f_0 + f_\epsilon]$, причем $f_0 \gg 2f_\epsilon$ (рис.1а).

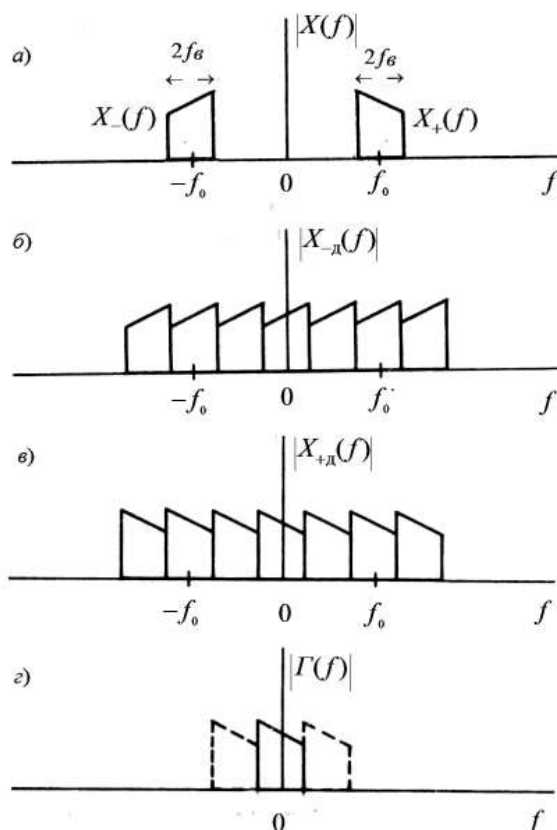


Рис. 1

Примером является сигнал с амплитудной и фазовой модуляцией

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)], \quad (1)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ – медленно меняющиеся по сравнению с циклическим множителем функции времени. Это наиболее общая форма записи узкополосного колебания. Гармонический сигнал (косинусоида с постоянной частотой f_0 и начальной фазой φ_0) подвергается одновременно амплитудной и фазовой модуляции. Составляющие $X_+(f)$ и $X_-(f)$ на рис.1ав сумме занимают полосу $f_d = 4f_\epsilon$. Это информационная полоса частот узкополосного радиосигнала. Такой сигнал при условии $f_0 \gg 2f_\epsilon$ можно считать квазигармоническим – его амплитуда и фаза медленно изменяются во времени по сравнению с несущим колебанием $\cos 2\pi f_0 t$.

В соответствии с теоремой отсчетов для такого сигнала необходимая частота дискретизации

$$f_d = 2(f_0 + f_\epsilon)$$

может оказаться очень высокой (за пределами быстродействия аналого-цифрового преобразователя). Равномерная дискретизация с шагом $\Delta t = 1/4f_\epsilon$ оказывается недостаточной, т.к. составляющие $X_+(f)$ и $X_-(f)$ при периодическом продолжении с периодом $f_d = 4f_\epsilon$ будут налагаться друг на друга, в результате частичные спектры будут отличаться от ис-

ходного и точное восстановление сигнала по его дискретным отсчетам становится невозможным. Тем не менее, для полосовых сигналов существуют методы дискретизации с частотой $4f_e$, которые позволяют сохранить информацию, необходимую для восстановления исходного сигнала. Дальнейшее изложение основывается на комплексном представлении сигналов, рассмотренном в предыдущей лекции.

Квадратурная дискретизация

Для полосового радиосигнала

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)] = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (2)$$

квадратурные компоненты $x_c(t) = A(t) \cos \varphi(t)$ и $x_s(t) = A(t) \sin \varphi(t)$ представляют собой низкочастотные сигналы со спектром, ограниченным полосой $2f_e$, и полностью определяются последовательностями отсчетов $\{x_c(k\Delta t)\}$ и $\{x_s(k\Delta t)\}$, где $\Delta t = 1/2f_e$.

Таким образом, в этом методе сначала осуществляется двухканальное синхронное детектирование, а затем дискретизация квадратурных компонент с шагом $\Delta t = 1/2f_e$ (рис. 1).

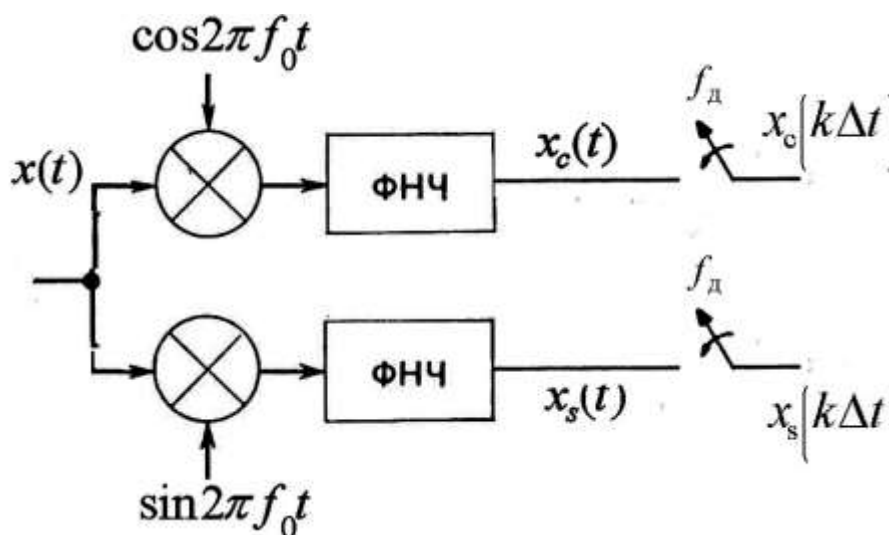


Рис. 1. Квадратурная дискретизация

Метод предполагает перенос спектра сигнала $x(t)$ с частоты f_0 на нулевую частоту и традиционно реализуется аналоговым способом, т. е. с применением аналоговых умножителей и ФНЧ. Принципиальный недостаток аналоговых способов формирования $x_c(t)$ и $x_s(t)$ – трудность реализации квадратурных каналов с идентичными и стабильными характеристиками. Кроме того, небольшой динамический диапазон аналоговых умножителей снижает эффективность использования многоразрядных АЦП для оцифровки отсчетов квадратур.

В рассмотренных методах дискретизация выполняется с частотой $f_d = 2f_e$ комплексных отсчетов в секунду ($4f_e$ действительных отсчетов в секунду). Эта величина значительно меньше частоты $f_d = 2(f_0 + f_e)$, необходимой для дискретизации действительного узкополосного сигнала по теореме отсчетов.

Для восстановления исходного полосового сигнала $x(t)$ по отсчетам $\{x_c(k\Delta t)\}$ и $\{x_s(k\Delta t)\}$, сначала с помощью ИФНЧ восстанавливаются квадратуры $x_c(t)$ и $x_s(t)$, а затем

и сам сигнал $x(t)$, используя соотношение

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_s(t - k\Delta t)}{2\pi f_s(t - k\Delta t)} \cos 2\pi f_0 t - \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_s(t - k\Delta t)}{2\pi f_s(t - k\Delta t)} \sin 2\pi f_0 t. \quad (3)$$

Формирование отсчетов квадратур из отсчётов узкополосного радиосигнала

Наличие быстродействующих АЦП, допускающих работу с частотой дискретизации 100 МГц и выше, делает возможным получить цифровые отсчеты высокочастотных колебаний на выходах УПЧ трактов многих радиоприемных устройств, в том числе радиолокационных. Ниже мы рассмотрим способ формирования отсчетов квадратурных компонент непосредственно из отсчетов колебания $x(t)$ на выходе УПЧ.

Выберем шаг дискретизации $x(t)$ равным

$$\Delta t = \frac{2n+1}{4f_0}, \quad (4)$$

где f_0 – промежуточная частота, n – целое, для определенности четное, т. е. $n=2, 4, 6, \dots$ (выбор n обсуждается далее). В соответствии с (4) шаг дискретизации $x(t)$ выбирается нечетно-кратным четверти периода колебания промежуточной частоты f_0 . Тогда с учетом (2) имеем

$$\begin{aligned} x(k\Delta t) &= x_c(k\Delta t) \cos 2\pi f_0 k\Delta t - x_s(k\Delta t) \sin 2\pi f_0 k\Delta t = \\ &= x_c(k\Delta t) \cos \pi k(n+1/2) - x_s(k\Delta t) \sin \pi k(n+1/2). \end{aligned}$$

Отдельно для четных и нечетных отсчетов получим

$$x(2k\Delta t) = x_c(2k\Delta t) \cdot (-1)^k, \quad x[(2k+1)\Delta t] = x_s[(2k+1)\Delta t] \cdot (-1)^{k+n}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x_c(2k\Delta t) &= x(2k\Delta t) \cdot (-1)^k, \\ x_s[(2k+1)\Delta t] &= x[(2k+1)\Delta t] \cdot (-1)^{k+n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, для формирования отсчетов квадратурных компонент достаточно разделить отсчеты сигнала $x(k\Delta t)$ на чётные и нечётные и в полученных подпоследовательностях инвертировать знак каждого второго отсчета (рис. 3). Заметим, что моменты взятия отсчетов квадратурных составляющих сдвинуты на Δt , что может создать определенные трудности при дальнейшей обработке, т. к. в каждый дискретный момент $t = k\Delta t$ обычно требуется пара отсчетов $x_c(k\Delta t)$ и $x_s(k\Delta t)$.

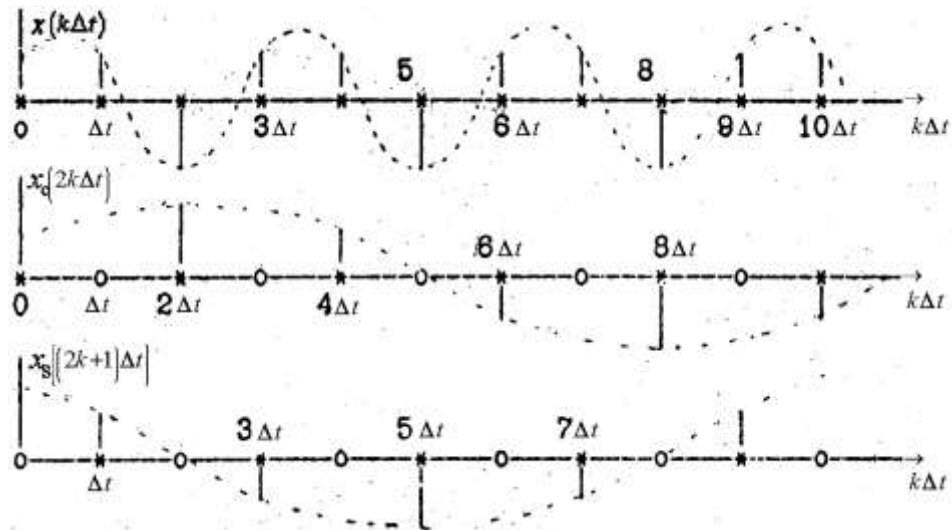


Рис. 2

Недостающие отсчеты квадратур (в точках, помеченных на рис. 2 кружками) можно получить путем интерполяции с помощью цифровых интерполирующих фильтров (ЦИФ).

Функциональная схема, реализующая рассмотренный метод формирования отсчетов квадратур, приведена на рис. 3.

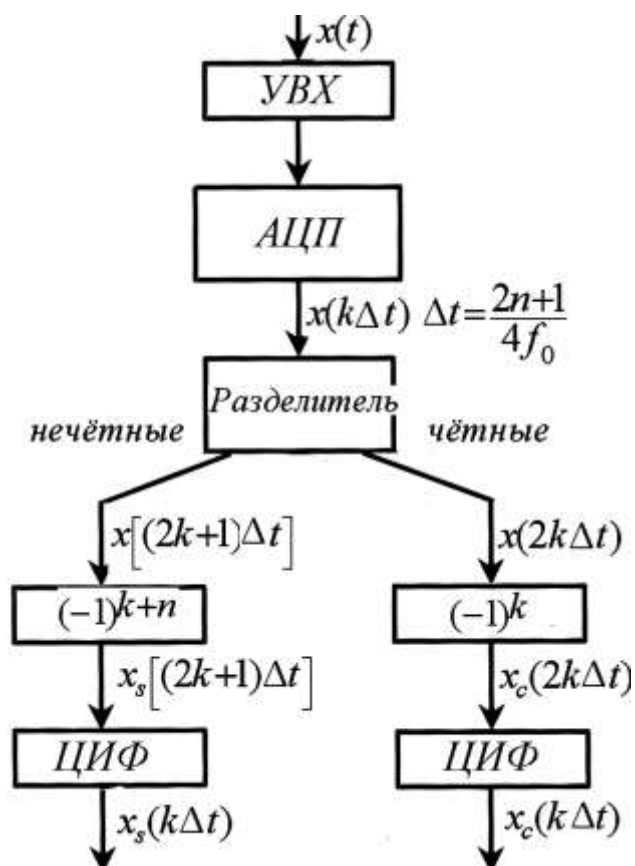


Рис. 3. Схема формирования отсчётов квадратур из отсчётов полосового колебания

Узкополосный сигнал $x(t)$ дискретизируется с шагом $\Delta t = \frac{2n+1}{4f_0}$ устройством выборки-

хранения (УВХ). Отсчёты $x(k\Delta t)$ после квантования в аналого-цифровом преобразователе (АЦП) разделяются на чётные и нечётные. Полученные подпоследовательности после знаковой модуляции поступают на цифровые интерполирующие фильтры (ЦИФ). Важно отметить, что один АЦП обслуживает оба квадратурных канала.

В качестве интерполяторов могут быть использованы цифровые интерполирующие фильтры нулевого и первого порядка. В первом из них недостающий отсчет берётся равным предыдущему отсчёту, например, $x_c(3\Delta t) = x_c(2\Delta t)$, а во втором – среднему арифметическому предыдущего и последующего отсчётов, например,

$$x_s(4\Delta t) = \frac{x_s(3\Delta t) + x_s(5\Delta t)}{2}.$$

В последнем случае каждый интерполированный отсчёт задерживается на Δt . Это нужно учитывать при дальнейшей обработке.

Самый простой способ интерполяции заключается в том, что недостающие отсчеты квадратур заменяются нулями. Этому методу можно дать наглядную интерпретацию в частотной области.

Рассмотрим такое преобразование действительного полосового сигнала $x(t)$, когда из последовательности его отсчетов с некоторым шагом Δt формируются две подпоследовательности по правилу:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$x(k)$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	...
$y_1(k)$	x_0	0	$-x_2$	0	x_4	0	$-x_6$	0	x_8	0	...
$y_2(k)$	0	x_1	0	$-x_3$	0	x_5	0	$-x_7$	0	x_9	...

Т.е. отсчеты сигнала $x(k\Delta t)$ разделяются на чётные и нечётные и в полученных подпоследовательностях инвертируется знак каждого второго отсчета. Недостающие отсчёты квадратур заменяются нулями.

Из подпоследовательностей $y_1(k)$ и $y_2(k)$ образуем новую последовательность

$$y(k) = y_1(k) + j y_2(k). \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, что

$$y(k) = x_c(2k) + j x_s(2k+1).$$

Сигналы $y(t)$ и $x(t)$, из отсчётов которых образуются последовательности $y(k)$ и $x(k)$, связаны соотношением

$$y(t) = x(t) \exp j 2\pi \frac{f_d}{4} t, \quad f_d = 1/\Delta t.$$

Между спектрами этих сигналов имеется простая связь:

$$Y(f) = X\left(f - f_d/4\right).$$

Спектры $X(f)$ и $Y(f)$ изображены на рис. 4а и рис. 4б.

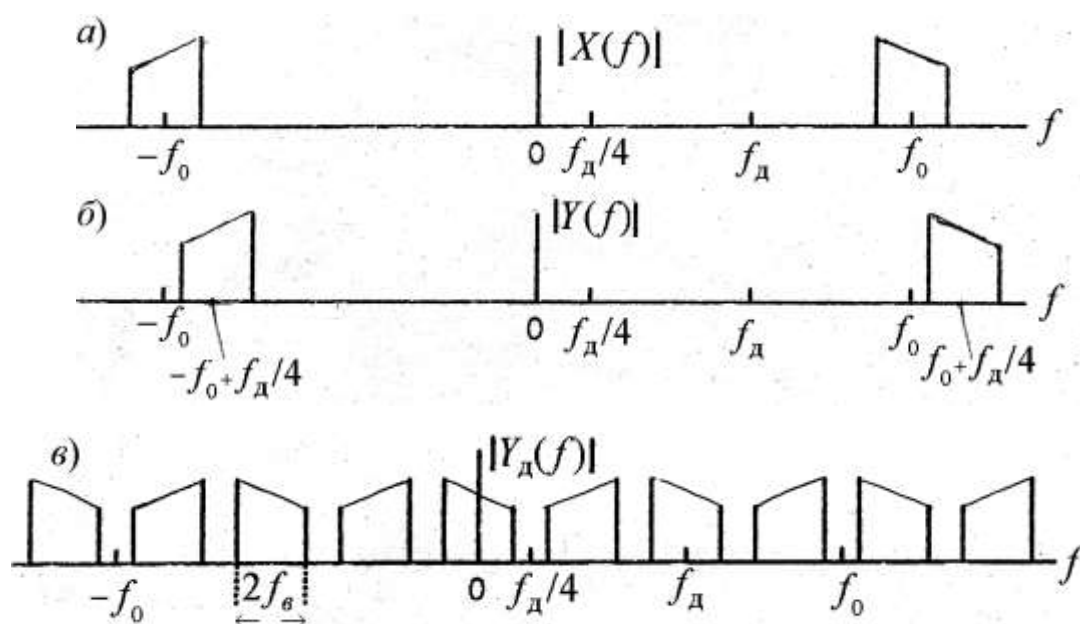


Рис. 4

Спектр последовательности $y(k)$ является периодическим повторением спектра $Y(f)$ с периодом f_d :

$$Y_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y(f + m f_d).$$

Этот спектр изображён на рис. 4в для случая $f_d = \frac{4}{7} f_0$.

Определим частоты дискретизации, при которых один прямой частичный спектр последовательности $y(k)$ окажется с центром на нулевой частоте:

$$\begin{aligned} f_0 + \frac{f_d}{4} &= n f_d, \quad n=1, 2, 3, \dots, \\ f_d &= \frac{f_0}{n - (1/4)} = \frac{4 f_0}{4n - 1}, \quad n=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично, чтобы инверсный частичный спектр оказался на нулевой частоте, необходимо выполнить условие

$$\begin{aligned} -f_0 + \frac{f_d}{4} &= -n f_d, \quad n=0, 1, 2, \dots, \\ f_d &= \frac{4 f_0}{4n + 1}, \quad n=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Можно записать (7) и (8) одной формулой:

$$f_d = \frac{4 f_0}{2n + 1}, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

причем при четном n на нулевую частоту переносится инверсный спектр, при нечетном – прямой. Спектр $y(k)$ при $f_d = \frac{4}{7} f_0$, $n=3$ показан на рис. 4в.

Для того чтобы получить комплексную огибающую $\gamma(t)$ сигнала $x(t)$, нужно выделить один частичный спектр на нулевой частоте, а чтобы получить ее отсчеты с частотой f_d ,

нужно подавить частичные инверсные спектры на частотах $\pm \frac{f_d}{2}, \pm \frac{3}{2} f_d, \pm \frac{5}{2} f_d, \dots$. Таким образом, интерполяция недостающих отсчетов комплексной огибающей $\gamma(t)$ сводится к подавлению частичных спектров последовательности $y(k)$, сосредоточенных возле указанных частот.

Формула (9) допустимых для описанного метода частот дискретизации дает всего одно значение, удовлетворяющее теореме Котельникова – это $n=0$, $f_d = 4f_0$, остальные случаи относятся к субдискретизации (см. далее) с частотами

$$f_d = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{4}{9}, \dots \right) f_0.$$

При этом наложения частичных спектров не происходит, если

$$f_d \geq 4f_0, \quad (10)$$

где $4f_0$ – полоса сигнала, что непосредственно видно из рис. 4. Также нетрудно видеть, что выбор частоты дискретизации в соответствии с (9) обеспечивает одинаковое расстояние между соседними частичными спектрами. Это означает, что при симметричной относительно f_0 форме прямого исходного спектра уровень помех наложения спектров имеет локальные минимумы при этих частотах дискретизации. Таким образом, (9) также может рассматриваться как формула для оптимальных в указанном смысле частот дискретизации радиосигналов.

Требования к апертурной дрожи моментов выборок в рассматриваемом методе остаются высокими и соответствуют требованиям при дискретизации сигналов с верхней частотой спектра

$$f_{1\sigma} = f_0 + \frac{\Delta f}{2} \approx f_0.$$

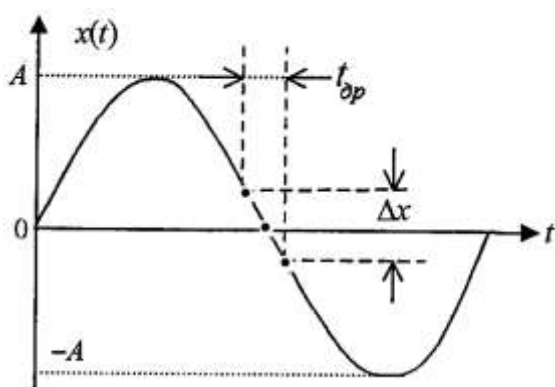


Рис.5

Допустимая величина апертурной дрожи рассчитывается из условия, что изменения самой высокочастотной компоненты входного сигнала за это время не должно превышать единицы младшего разряда АЦП: $x't_{оп} < 1/N$.

В точке максимальной крутизны (рис. 5)

$$\sin 2\pi f_{1\sigma} t \approx 2\pi f_{1\sigma} t, \text{ поэтому}$$

$$t_{оп} < \frac{1}{N\pi f_{1\sigma}}, \quad (11)$$

где N – число уровней квантования в АЦП. Максимальная величина шума, обусловленного дрожью моментов выборок, при этом не будет превышать максимальной величины шума квантования.

В некоторых случаях применение описанного цифрового метода получения отсчетов квадратур полосовых сигналов особенно удобно, т. к. отпадает необходимость в интерполяции недостающих отсчетов.

Пример 1. Рассмотрим системы, осуществляющие согласованную фильтрацию. Частотная характеристика цифрового согласованного фильтра (СФ):

$$H(f) = \Gamma_d^*(f),$$

где $\Gamma_d(f)$ – спектр отсчетов комплексной огибающей $\gamma(t)$ сигнала $x(t)$. Пусть частота дискретизации выбрана в соответствии с (9) (n – нечетное) и пусть выполняется условие

(10), а на вход СФ подаются не выборки $y(k)$, а последовательность $y(k)$. Т. к. $H(f)$ сосредоточена возле частот $(0, \pm 1, \pm 2, \dots) f_d$, то на выходе фильтра составляющие спектра $y(k)$ на частотах $\left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots\right) f_d$ будут подавлены, а значит, специального интерполятора сигнала $y(k)$ не требуется.

Дискретизация второго порядка

Отсчёты квадратурных компонент можно получить с помощью так называемой дискретизации второго порядка, когда образуются два перемежающихся набора эквидистантных отсчётов $x(k\Delta t)$ и $x(k\Delta t - \tau)$ полосового колебания. Если выбрать шаг дискретизации Δt и временной сдвиг τ из условия

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{n}{2f_0} \leq \frac{1}{2f_0}; \quad n = 1, 2, 3, \dots; \\ \tau &= \frac{1}{4f_0} + \lambda \Delta t; \quad \lambda - \text{целое число,} \end{aligned} \quad (12)$$

то по аналогии с (5) будем иметь

$$\begin{aligned} x(k\Delta t) &= (-1)^{kn} \cdot x_c(k\Delta t), \\ x(k\Delta t - \tau) &= (-1)^{n(k-\lambda)} \cdot x_s(k\Delta t - \tau). \end{aligned} \quad (13)$$

Дискретизация второго порядка (рис. 6) является вариантом рассмотренного выше метода и также избавляет от необходимости квадратурной демодуляции.

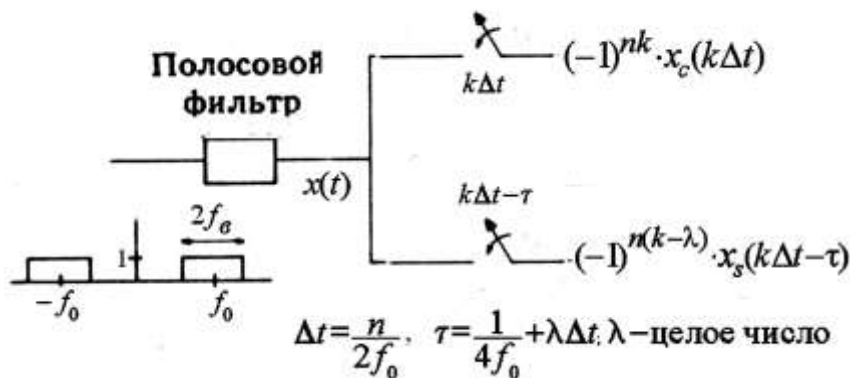


Рис.6. Дискретизация второго порядка

Дискретизация аналитического сигнала

Обратимся к рис. 7а. Естественно применить метод исключения составляющих с отрицательными частотами $X_-(f)$. Это эквивалентно формированию аналитического сигнала. Характерно, что спектр аналитического сигнала содержит только составляющие с положительными частотами

$$X_A(f) = 2X_+(f)$$

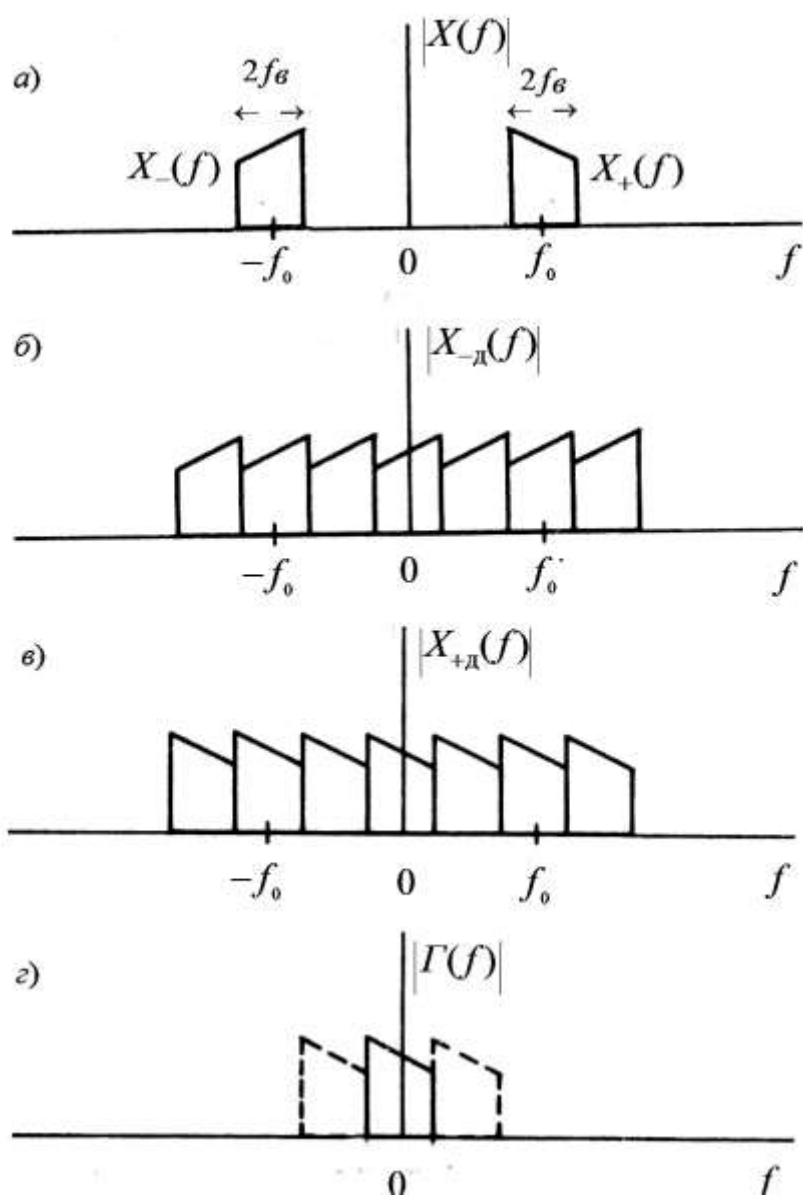


Рис. 7

Аналитический сигнал по определению равен

$$x_A(t) = x(t) + jx_G(t),$$

где $x_G(t)$ – сигнал, получаемый пропусканием $x(t)$ через преобразователь Гильберта (линейный фильтр с передаточной функцией $H(f) = -j \operatorname{sign} f$). Как отмечалось, преобразование Гильберта может быть приближенно выполнено с помощью фазовращателя, работающего в узкой полосе $[f_0 - f_\epsilon, f_0 + f_\epsilon]$.

При дискретизации аналитического сигнала $x_A(t)$ с шагом $\Delta t = 1/2f_\epsilon$ его спектр преобразуется в периодическое продолжение $2X_+(f)$ с периодом $f_d = 2f_\epsilon$ (рис.7в). Так как частичные спектры $2X_+(f \pm n f_d)$ не перекрываются, возможно точное восстановление $x_A(t)$ по выборкам $x_A(k\Delta t)$.

На рис. 8 приведена схема дискретизации аналитического сигнала. Как видно из этого рисунка, исходный сигнал $x(t)$ предварительно фильтруется полосовым фильтром. Это необходимо для ослабления эффекта наложения частичных спектров при дискретизации. В схеме действуют два синхронно работающих дискретизатора (АЦП), обслуживающих соответственно действительный и мнимый каналы обработки.



Рис. 8. Схема дискретизации аналитического сигнала

Для восстановления $x_A(t)$ по выборкам $x_A(k\Delta t)$ необходим полосовой фильтр с передаточной характеристикой

$$H(f) = \begin{cases} 1, & \text{при } f_0 - f_0 \leq f \leq f_0 + f_0, \\ 0, & \text{при других } f. \end{cases} \quad (14)$$

Комплексная импульсная характеристика этого фильтра имеет вид

$$h(t) = \frac{\sin 2\pi f_0 t}{\pi t} e^{j2\pi f_0 t}. \quad (15)$$

Действительная часть колебания, получающегося на выходе фильтра, дает исходный действительный сигнал. Взятие действительной части эквивалентно формированию части спектра в области отрицательных частот. И в этом методе дискретизация выполняется также с частотой $f_d = 2f_0$ комплексных отсчетов в секунду ($4f_0$ действительных отсчетов в секунду).

Низкочастотная копия спектра $\Gamma(f)$ изображена на рис. 8г сплошной линией. При этом предполагается, что $f_0/2f_0 = m$, где m – целое число. Это условие можно выполнить либо выбором f_0 , либо дополнительным смещением по частоте (гетеродинированием сигнала). Низкочастотная копия спектра является спектром комплексной огибающей $\gamma(t) = x_c(t) + jx_s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$, которая содержит всю обусловленную модуляцией информацию.

Аналогично, исключив составляющие $X_+(f)$, можно сформировать сопряженный аналитический сигнал $x_A^*(t) = x(t) - jx_T(t)$. При дискретизации аналитического сигнала $x_A^*(t)$ с шагом $\Delta t = 1/2f_0$ его спектр преобразуется в периодическое продолжение $2X_-(f)$ с периодом $f_d = 2f_0$ (рис. 8б).

Для восстановления $x_A^*(t)$ по выборкам $x_A^*(k\Delta t)$ необходим полосовой фильтр с импульсной характеристикой

$$h^*(t) = \frac{\sin 2\pi f_e t}{\pi t} e^{-j2\pi f_0 t}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Показать, что для узкополосного сигнала со спектром, изображённым на рис. 8а, частоту дискретизации можно взять равной $f_d = 4f_e$ лишь при условии, если граничные частоты $f_0 - f_e$ и $f_0 + f_e$ кратны $2f_e$, т. е. если

$$f_0 - f_e = m(2f_e), m = 0, 1, 2, \dots$$

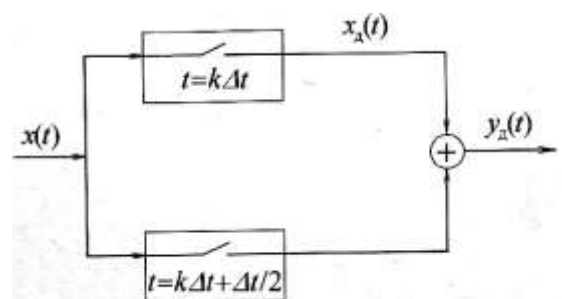
Изобразить спектр после дискретизации для этого случая.

2. Квадратурные компоненты узкополосного колебания. Комплексная огибающая и её спектр.
3. Связь действительного узкополосного сигнала $x(t)$ с комплексной огибающей $\gamma(t)$
4. Достоинства и недостатки метода квадратурной дискретизации узкополосных радиосигналов при использовании в радиолокации.
5. Метод дискретизации узкополосных радиосигналов с формированием аналитического сигнала. Достоинства и недостатки метода при использовании в радиолокации.
6. Преобразователь Гильберта как фильтр. Импульсная и частотная характеристики. Способы реализации. Почему преобразователь Гильберта точно не может быть точно реализован для полосового радиосигнала?
7. Формирование отсчётов квадратур непосредственно из отсчётов узкополосного колебания. Достоинства и недостатки метода.
8. На частотной диаграмме пояснить формирование отсчётов комплексной огибающей с помощью интерполяционных фильтров.
9. Формирование отсчётов комплексной огибающей с помощью согласованного фильтра (пример 1).
10. Требования к апертурной дрожи моментов выборок в рассматриваемом методе (рис. 5).

Лекция 2 октября 2017 г. Задачи для самостоятельного решения

1. Сформулировать теорему Котельникова на случай полосовых радиосигналов, спектр которых отличен от нуля лишь в области $f_1 \leq f \leq f_2$, $f > 0$.

2. Два идеальных дискретизатора работают с одинаковым шагом дискретизации Δt , но со сдвигом $\Delta t/2$, как показано на рисунке. Пусть $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$, $f_0 = 1$ МГц и частота дискретизации $f_d = 1/\Delta t = 5$ МГц. Изобразить как функцию нормированной частоты $\nu = f/f_d$ в диапазоне $|\nu| \leq 2$:



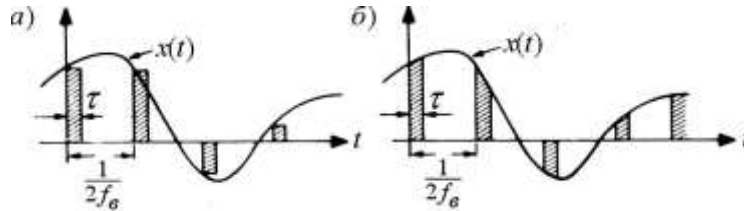
- модуль спектра исходного сигнала $x(t)$;
- модуль спектра дискретизованного сигнала $x_d(t)$;
- модуль спектра сигнала $y_d(t)$ на выходе суммирующего устройства. Какой практический вывод можно сделать из сравнения этих спектров?

3. Имеется сигнал в виде суммы двух гармонических колебаний различных частот: $x(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$. Найти соответствующий аналитический сигнал, сформулировать для него теорему отсчетов и записать ряд Котельникова. Как по отсчетам аналитического сигнала можно восстановить исходный сигнал $x(t)$?

4. В системе ЦОС реального времени используется 10-разрядный биполярный АЦП со временем преобразования 35 мкс. Какова наибольшая частота синусоидального сигнала, для которой

апертурный эффект (изменение сигнала за апертурное время 35 мкс) не превышает 1 МЗР (единицы младшего значащего разряда)? Как изменится решение задачи, если перед АЦП поставить устройство выборки-хранения (УВХ) с апертурным временем 25 нс и временем захвата сигнала 2 мкс?

5. В реальных системах отсчёты сигнала $x(t)$ осуществляется импульсами конечной длительности вместо идеальных δ -импульсов. Два способа получения дискретизованного сигнала представлены на рисунке.



В способе *a* дискретный сигнал получается путём фиксации на некоторое время мгновенных значений исходного сигнала $x(t)$. Это устройство выборки-хранения (УВХ). Длительность импульсов дискретизации τ соответствует времени фиксации; в пределе она может быть равна шагу дискретизации $\Delta t = 1/2f_e$.

В способе *b* каждые Δt секунд стробируются сегменты сигнала $x(t)$ длительностью τ . Обозначим отношение длительности импульса τ к периоду Δt через $\alpha = \tau / \Delta t$. Это отношение всегда удовлетворяет неравенству $\alpha \leq 1$. Будем считать, что спектр $X(f)$ ограничен полосой $|f| \leq f_e$.

Описать спектры указанных импульсных последовательностей и показать, что в каждом случае с высокой точностью можно восстановить исходный сигнал $x(t)$. Изобразить функциональные схемы таких дискретизаторов.

Примеры решения задач на ДВПФ

Пример 1. Сходимость ДВПФ

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k}, \quad (0.1)$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) e^{j\theta k} d\theta. \quad (0.2)$$

Рассмотрим пару ДВПФ в виде (0.1) и (0.2). Мы пока еще не доказали, что эти формулы взаимно обратимы. Подставим (0.1) в правую часть (0.2), тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\theta m} \right) e^{j\theta k} d\theta = \hat{x}(k). \quad (0.3)$$

Нам нужно показать, что $\hat{x}(k) = x(k)$, если $X(\theta)$ определена формулой (0.1). Если бесконечный ряд под интегралом в (0.3) равномерно сходится на множестве определения θ , то его можно почленно проинтегрировать. т.е.

$$\hat{x}(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\theta(k-m)} d\theta \right).$$

Интеграл в круглых скобках равен

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\theta(k-m)} d\theta = \frac{\sin \pi(k-m)}{\pi(k-m)} = \mathbf{1}(k-m) = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \neq k. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\hat{x}(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \mathbf{1}(k-m) = x(k), \text{ ч. т. д.}$$

Вопрос о представимости сигнала формулой (2.23) равносильен вопросу о сходимости ряда (2.22).

Выясним теперь условия, при которых ряд (0.1) сходится, т. е.

$$|X(\theta)| < \infty,$$

где $X(\theta)$ – предел при $N \rightarrow \infty$ частичных сумм

$$X(\theta, N) = \sum_{k=-N}^N x(k) e^{-j\theta k}.$$

Достаточное условие сходимости определяется следующим образом:

$$|X(\theta)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| |e^{-j\theta k}| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| < \infty.$$

Таким образом, для абсолютно суммируемой последовательности $x(k)$ ДВПФ $X(\theta)$ определено на всей числовой прямой. Более того, можно показать, что по признаку Вейерштрасса ряд (0.1) равномерно сходится к непрерывной функции от θ . Итак, абсолютно суммируемость последовательности $x(k)$ является достаточным условием существования ДВПФ. Это условие гарантирует также равномерную сходимость. Ясно, что любая последовательность конечной длины абсолютно суммируема и для неё можно найти ДВПФ. Поэтому системы с конечной импульсной характеристикой $h(k)$ (например, КИХ-фильтры) в силу её абсолютной суммируемости имеют непрерывную частотную характеристику

$$H(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-j\theta k}$$

и всегда устойчивы.¹ Приведём несколько примеров.

Пример 2. Пусть $x(k) = a^k \sigma(k)$, где $\sigma(k)$ - дискретная функция включения. ДВПФ этой последовательности

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-j\theta k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a e^{-j\theta})^k = \frac{1}{1 - a e^{-j\theta}},$$

если $|a| < 1$. Это неравенство является также критерием абсолютной суммируемости последовательности $x(k)$, т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1-|a|} < \infty, \text{ если только } |a| < 1.$$

Некоторые последовательности не являются абсолютно суммируемыми, но обладают конечной энергией:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty.$$

Такие последовательности с суммируемым квадратом могут быть представлены в виде

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) e^{j\theta k} d\theta,$$

если мы откажемся от равномерной сходимости ряда

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k}.$$

В этом случае мы имеем сходимость в среднеквадратичном, т. е.

¹Система устойчива, если её реакция на любой ограниченный по амплитуде сигнал ограничена (при конечных начальных условиях). Необходимым и достаточным условием устойчивости является абсолютная суммируемость импульсной характеристики [1].

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X(\theta) - \sum_{k=-N}^N x(k) e^{-j\theta k} \right|^2 d\theta = 0.$$

Пример3. Определим импульсную характеристику $h_0(k)$ идеального фильтра нижних частот (ИФНЧ). Его частотная характеристика, равная на промежутке $[-\pi, \pi]$

$$H_0(\theta) = \begin{cases} 1, & |\theta| < \theta_c, \\ 0, & \theta_c < |\theta| \leq \pi, \end{cases}$$

является периодической с периодом 2π .

Импульсная характеристика находится с помощью обратного ДВПФ:

$$h_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_c}^{\theta_c} e^{j\theta k} d\theta = \frac{1}{j2\pi k} (e^{j\theta_c k} - e^{-j\theta_c k}) = \frac{\sin \theta_c k}{\pi k}, \quad -\infty < k < \infty. \quad (0.4)$$

Поскольку импульсная характеристика некаузальная, т. е. $h_0(k) \neq 0$ при $k < 0$, ИФНЧ не реализуем. Кроме того, последовательность $h_0(k)$ не является абсолютно суммируемой. Члены последовательности хоть и стремятся к нулю при неограниченном возрастании k , но не быстрее чем $1/k$. Это происходит в результате разрыва функции $H_0(\theta)$ в точках $\theta = \pm\theta_c$. По этой причине ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta_c k}{\pi k} e^{-j\theta k}$$

сходится неравномерно на числовой оси. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть поведение усечённого ряда

$$H_0(\theta, N) = \sum_{k=-N}^N \frac{\sin \theta_c k}{\pi k} e^{-j\theta k}. \quad (0.5)$$

График функции $H_0(\theta, N)$ представлен на рис. 2.4 для двух значений N .

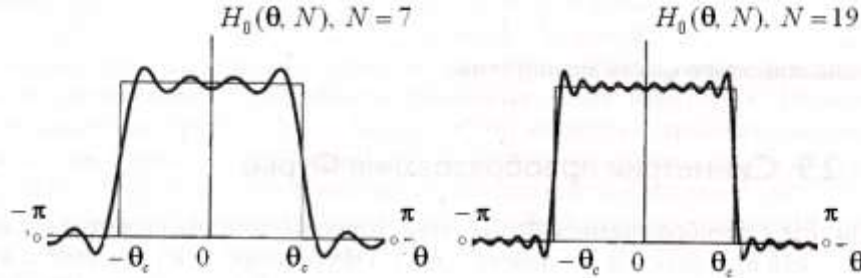


Рис. 2.4. Графики частичных сумм ДВПФ

Видно, что графики заметно пульсируют вблизи точек разрыва $H_0(\theta)$ (явление Гиббса), но амплитуда пульсаций не уменьшается с ростом N . Можно показать, что максимальная амплитуда пульсаций не стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Пульсации сжимаются по горизонтали к вертикальному отрезку, проведённому через точку разрыва $\theta = \pm\theta_c$. Следовательно ряд (0.5) сходится к разрывной функции $H_0(\theta)$ неравномерно. Однако последовательность (0.4) суммируема с квадратом, соответственно $H_0(\theta, N)$ сходится к $H_0(\theta)$ в среднеквадратичном, т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H_0(\theta) - H_0(\theta, N)|^2 d\theta = 0.$$

При больших N функции $H_0(\theta, N)$ и $H_0(\theta)$ отличаются лишь в точках $\theta = \pm\theta_c$.

Поведение частичных сумм ДВПФ имеет важное значение при разработке дискретных (цифровых) фильтров.