МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра радиоэлектроники и прикладной информатики

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Методические указания
к лабораторной работе

по курсу *Основы цифровой обработки сигналов*

Составители
Ю.А. Романюк
А.В. Филимонов

МОСКВА
МФТИ
2016

УДК 621.391

Дискретное преобразование Фурье: методические указания к лабораторной работе по курсу *Основы цифровой обработки сигналов* / сост. Ю.А. Романюк, А.В. Филимонов. – М.: МФТИ, 2016. – 24 с.

Работа посвящена исследованию основных свойств дискретного преобразования Фурье с помощью моделирования в среде GNU Octave или MATLAB. Предназначается для студентов, изучающих методы цифровой обработки сигналов.

Содержание

1. Цель работы

Целью данной работы является изучение основных свойств дискретного преобразования Фурье с помощью моделирования в среде GNU Octave или MATLAB.

2. Теоретическое введение

2.1. Дискретное преобразование Фурье

Пусть x(k) – дискретная периодическая последовательность отсчетов с периодом N ($0 \le k \le N-1$). Прямое и обратное дискретное преобразование Фурье определяется следующим образом:

$$X(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)W_N^{-nk} \tag{1}$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n)W_N^{nk} \tag{2}$$

Здесь $W_N^{nk} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ – базисные функции ДПФ.

Пара ДПФ справедлива и для последовательности $x(k)$ конечной длины в N отсчётов. Однако при этом следует помнить, что обратное ДПФ дает N-периодическую функцию, совпадающую с исходной последовательностью на интервале $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Таким образом, отличительной особенностью ДПФ является то, что сигнал и его спектр определяются на конечных и равных интервалах N. При этом меняется привычное понятие сдвига, а именно: сдвиг сигнала и его спектра на интервале N понимается как циклическая перестановка отсчетов (часть сигнала или его спектра, выходящая за пределы интервала N с одного конца, вставляется в этот интервал с другого конца). При циклическом сдвиге значения индексов k и n отсчитываются по модулю N:

$$x(k-m) = x[(k-m)\ mod\ N] = x(k-m)_N$$

$$X(n-p) = X[(n-p)\ mod\ N] = X(n-p)_N$$

Например, $N = 64$, тогда $X(69)_{64} = X(5)$.

2.2. Свойства и теоремы ДПФ

Пусть $x(k) \leftrightarrow X(n)$ – пара ДПФ, тогда выполняются следующие свойства симметрии:

	Сигнал	ДПФ
1	$x^*(k)$	$X^*(N-n)$
2	$x(N-k)$	$X(N-n)$
3	$x(k) = x^*(k)$	$X(n) = X^*(N-n)$
4	$x(k) = -x^*(k)$	$X(n) = -X^*(N-n)$
5	$x(k) = x(N-k)$	$X(n) = X(N-n)$
6	$x(k) = -x(N-k)$	$X(n) = -X(N-n)$
7	$x(k) = x^*(k) = x(N-k)$	$X(n) = X^*(n)$
8	$x(k) = x^*(k) = -x(N-k)$	$X(n) = -X^*(n)$

Равенство Парсеваля для ДПФ:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)y^*(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n)Y^*(n) \tag{3}$$

Теорема запаздывания:

$$x((k-l)\ mod\ N) \leftrightarrow X(n)W_N^{-nl} \tag{4}$$

Теорема о циклической свертке для ДПФ:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)h((l-k)\ mod\ N) = X(n)\cdot H(n) \tag{5}$$

2.3. Соответствие между ДПФ, рядом Фурье и преобразованием Фурье

В данной работе для анализа спектров сигналов используется среда Matlab/GNU Octave, в которой вычисления производятся только с дискретными отсчетами сигнала. Графики модуля и фазы спектральной плотности получаются путем интерполяции по отсчетам дискретного преобразования Фурье.

Пусть $x(t)$ – действительный сигнал длительностью T. Ряд Фурье его T-периодического продолжения в общем случае может содержать бесконечное число членов:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{j\frac{2\pi m t}{T}}, \tag{6}$$

где

$$C_m = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)e^{-j\frac{2\pi mt}{T}} \quad (7)$$

Сигнал $x(t)$ дискретизуется так, что на интервале T берется N отсчетов $x(k\Delta t)$ с шагом $\Delta T = \frac{T}{N}$. Коэффициенты ДПФ для последовательности $\{x(k\Delta t)\}$

$$X(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(k\Delta t)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \quad (8)$$

Используя разложение $x(t)$ в ряд Фурье, получим

$$X(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi(m-n)k}{N}} \quad (9)$$

Так как дискретные экспоненциальные функции ортогональны на интервале N, то можно записать

$$X(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{n+lN} \quad (10)$$

Если ряд Фурье не содержит гармоник с номерами выше $\frac{N}{2}$, то при четном N

$$X(n) = \begin{cases} C_n, & n = 0, 1, 2, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \\ C_{-(N-n)}, & n = \frac{N}{2}, \ldots, N - 1 \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, существует ограниченный класс сигналов, для которых соответствие между коэффициентами Фурье и ДПФ точное. Он включает в себя периодические сигналы с ограниченным спектром, дискретизованные в соответствии с теоремой отсчетов.

Для апериодического сигнала $x(t)$ конечной длительности T отсчёты его спектральной функции

$$X(\omega) = \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad (12)$$

взятые с шагом $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ также приближенно соответствуют коэффициентам ДПФ $X(n)$, вычисленным по N отсчетам сигнала с шагом $\frac{T}{N}$

$$X(n) = \begin{cases} C_n = \frac{X(n\Delta\omega)}{T}, & n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ C_{-(N-n)}, & n = \frac{N}{2}, \dots, N - 1 \end{cases} \qquad (13)$$

2.4. Связь ДПФ и ДВПФ

Пусть $x(k)$ – N-точечная последовательность. ДВПФ этой последовательности

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k}. \qquad (14)$$

Используя обратное ДПФ, получим

$$X(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi(\nu - \frac{n}{N})k}. \qquad (15)$$

Просуммировав геометрическую прогрессию, получим интерполяционнаю формулу восстановления континуальной функции $X(\nu)$ по коэффициентам ДПФ $X(n)$

$$X(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \frac{sin(\pi(\nu - \frac{n}{N})N)}{sin(\pi(\nu - \frac{n}{N}))} e^{-j2\pi(\nu - \frac{n}{N})(N-1)}. \qquad (16)$$

В точках $\nu = \frac{n}{N}$ имеет место $X(\nu) = X(\frac{n}{N}) = NX(n)$. Таким образом, коэффициенты ДПФ можно рассматривать как отсчёты функции $\frac{1}{N}X(\nu)$, взятые с шагом $\Delta\nu = \frac{1}{N}$ в соответствии с теоремой отсчётов в частотной области.

2.5. Интерполяция добавлением нулевых отсчётов

Практический способ увеличения числа отсчётов функции $X(\nu)$ состоит в следующем. Определим новую последовательность $y(k)$ длиной в M отсчётов ($M > N$) путём дополнения исходной последовательности нулевыми отсчётами. Число таких нулевых отсчётов будет $(M - N)$

$$y(k) = \begin{cases} x(k), & 0 \le k \le N - 1 \\ 0, & N \le k \le M - 1 \end{cases} \qquad (17)$$

Очевидно, что ДВПФ $Y(\nu)$ совпадает с $X(\nu)$. Тогда, отсчётные значения функции $X(\nu)$ в точках $\nu_m = \frac{m}{M}, 0 \leq m \leq M-1$ взятые с новым шагом $\Delta\nu = \frac{1}{M}$, можно записать следующим образом

$$X(\nu_m) = Y(\frac{m}{M}) = \sum_{k=0}^{M-1} y(k) e^{-j2\pi\frac{mk}{M}} \tag{18}$$

Это выражение с точностью до множителя $\frac{1}{M}$ представляет собой M-точечное ДПФ, которое может быть вычислено, например, с использованием быстрых алгоритмов.

Характерно, что если взять $M = 2N$, то дополнительные отсчёты будут расположены между N первоначальными. При этом улучшается качество визуализации спектральной функции $X(\nu)$, которая остаётся неизменной от такого дополнения, так как она определяется первоначальной длиной массива $x(k)$.

2.6. Временная и частотная оси ДПФ

Определим физические размерности, связанные со значениями индексов k и n в последовательностях $x(k)$ и $X(n)$. До сих пор в наших рассуждениях это были просто целые числа, причём и $0 \leq k \leq N-1$ и $0 \leq n \leq N-1$. Рассмотрим последовательность $x(k)$ из N отсчётов, взятых с шагом Δt секунд.

N-точечное ДПФ отображает N отсчётов во временной области в N отсчётов в спектральной. Мы хотим связать $X(n)$ с шагом дискретизации Δt секунд, или с частотой дискретизации $f_d = \frac{1}{\Delta t}$ Гц. В этом случае период повторения $X(n)$ равен $f_d = \frac{1}{\Delta t}$ Гц, шаг сетки частот ДПФ (разрешение) составляет $\Delta f = \frac{f_d}{N} = \frac{1}{N\Delta t}$ Гц. Таким образом, каждый отсчёт $X(n)$ соответствует частоте $\frac{n}{N\Delta t} = \frac{nf_d}{N}$ Гц

Введём нормированную частоту $\nu = \frac{f}{f_d} = f\Delta t$ (доли частоты дискретизации). В этом случае период повторения $X(n)$ равен 1, шаг сетки частот ДПФ составляет $\Delta\nu = \frac{1}{N}$. Эту величину называют бином. Таким образом, каждый отсчёт соответствует нормированной частоте $\nu_n = \frac{n}{N}$ бин.

3. Задание к допуску

1. Получить у преподавателя начальное состояние генератора случайных чисел.

2. Скопировать скрипты для данной работы (файлы *.m) из папки с описанием работы в папку FRTK\<номер группы>\<ФИО>. **Внимание:** Полный путь к файлам должен содержать только латинские символы.

3. Записать выражения для прямого и обратного ДПФ.

4. Запустить Matlab/Octave. Сменить рабочую директорию на ту, куда были скопированы скрипты.

5. Вычислить 16-точечное ДПФ единичного импульса

$$x(0) = 1, x(k) = 0 \forall k \in [1; 15].$$

   Построить график модуля спектра и фазы. Провести моделирование и сравнить результаты.

6. Вычислить 16-точечное ДПФ дискретной функции включения

$$x(k) = 1 \forall k \in [0; 15].$$

   Построить график модуля спектра и фазы. Провести моделирование и сравнить результаты.

4. Задание к выполнению

4.1. Симметрия ДПФ

1. Получить у преподавателя номер одного из свойств симметрии ДПФ, проиллюстрировать его на примере 8-ми точечного ДПФ, построить графики модуля и фазы спектра и зарисовать в тетрадь.

4.2. Циклический сдвиг

1. Открыть файл circular_shift_test.m. Задать указанное в варианте значение начального состояния ГПСЧ.

2. Запустить скрипт circular_shift_test. Зарисовать полученные графики модуля и фазы ДПФ.

3. Получить у преподавателя параметры сдвига. Модифицировать скрипт circular_shift_test.m так, чтобы получить графики модуля и фазы ДПФ для последовательности, полученной из входной последовательности циклическим сдвигом.

4. Запустить скрипт circular_shift_test. Зарисовать полученные графики модуля и фазы ДПФ. Сравнить с исходными графиками и объяснить полученные результаты.

4.3. Частотная ось ДПФ

1. Открыть файл frequency_test.m. Задать указанное в варианте значение начального состояния ГПСЧ.

2. В скрипте frequency_test на вход ДПФ подается сигнал состоящий из суммы двух синусоид различной амплитуды с частотами f_1 и f_2 Гц, где f_1 и f_2 – целые числа, а также шума.

3. Определить расстояние в герцах между соседними бинами.

4. По спектру оценить частоты f_1 и f_2 с точностью до 1 Гц. *Указание*: пронаблюдать, как на спектр влияет частота дискретизации (Fd) и время накопления сигнала (RunToTime).

4.4. ДПФ и ДВПФ

1. Открыть файл dvpf_test.m. Задать указанное в варианте значение начального состояния ГПСЧ.

2. В скрипте dvpf_test на вход ДПФ подается сигнал состоящий из суммы двух синусоид различной амплитуды с частотами f_1 и f_2 Гц. На графике рисуется огибающая, построенная по отсчетам ДПФ, аппроксимирующая вид ДВПФ для входного сигнала.

3. Требуется по спектру оценить частоты f_1 и f_2 с точностью до 1 Гц. *Указание*: пронаблюдайте, как на спектр влияет количество нулей, дописанных в конец входной последовательности.

4. Сравните результаты, полученные с помощью добавления нулей в конец последовательности, с огибающей, построенной по настоящим отсчетам сигнала.

4.5. Фильтрация с помощью ДПФ

1. Открыть файл noise_test.m. Задать указанное в варианте значение начального состояния ГПСЧ.

2. В скрипте noise_test на вход ДПФ подается сигнал из суммы двух синусоид с частотами f_1 и f_2 ($f_1 > f_2 > 150$ Гц) и «коричневого» шума.

3. Требуется с помощью обратного ДПФ восстановить исходный сигнал, максимально отфильтровав низкочастотную помеху.

5. Защита эксперимента

1. Выразить коэффициенты ДПФ циклически сдвинутой последовательности через коэффициенты ДПФ исходной. Сравнить с экспериментальными результатами.

2. Как по номеру отсчета ДПФ определить частоту в Гц?

3. От чего зависит разрешение по частоте для ДПФ?

4. Как связаны ДПФ и ДВПФ? Продемонстрировать эту связь на полученных графиках.

5. Почему выходной сигнал после фильтрации отличается от исходного? Как можно улучшить фильтрацию? Возможно ли добиться точного совпадения выходного и исходного сигналов?

6. Контрольные вопросы

1. Запишите формулы ДПФ.

2. Основные свойства ДПФ.

3. Циклический сдвиг сигнала и его спектра при ДПФ.

4. Необходимость применения оконных функций при ДПФ.
5. Прямоугольное окно, треугольное окно, окно Хана.
6. Частотная ось ДПФ. Разрешение по частоте, дискретная нормированная частота, связь с частотами в Гц (рад/с).
7. Два пути перехода от непрерывному к дискретному преобразованию Фурье.
8. Соответствие между ДПФ, рядом Фурье и непрерывным преобразованием Фурье.
9. Реакция ДПФ-анализатора на комплексный гармонический сигнал. Бины ДПФ.
10. ДПФ как набор полосовых фильтров. Импульсная и частотная характеристика таких фильтров.
11. Линейная и циклическая свертки дискретных сигналов.
12. Алгоритм БПФ. Выигрыш применения БПФ при вычислении свертки.
13. Смысл ДПФ для периодической последовательности.
14. Смысл ДПФ для конечной последовательности.
15. Расчет амплитудного и фазового спектров периодической последовательности с помощью ДПФ.
16. Восстановление аналогового сигнала с финитным спектром по отсчетам ДПФ и на основе ряда Котельникова.
17. Связь ДПФ и ДВПФ.
18. Влияние добавления нулей к исходной последовательности на разрешение по частое в ДПФ.
19. Вычисление спектральной плотности в L точках на основе ДПФ при $L > N$.
20. Фильтрация с помощью ДПФ.

7. Задачи

Задачи, помеченные M, нужно промоделировать на MATLAB или GNU Octave.

1. (M) Пусть $x(k) \leftrightarrow X(n)$ – пара N-точечного ДПФ, N – четное.
   - Показать, что $X(\frac{N}{2}) = 0$, если $x(k)$ – симметричная на интервале N последовательность, т.е. $x(k) = x(N-1-k)$.
   - Показать, что $X(0) = 0$, если $x(k)$ – антисимметричная на интервале N последовательность, т.е. $x(k) = -x(N-1-k)$.
   - Показать, что $X(2r) = 0, r = 0, 1, \ldots, R-1, R = \frac{N}{2}$, если $x(k) = -x(k+R)$.
2. (M) Пусть $x(k) \leftrightarrow X(n)$ – пара N-точечного ДПФ. Образуем новую последовательность $y(l) = x(5l), 0 \le l \le \frac{N}{5} - 1$. Выразить коэффициенты ДПФ Y(m) через X(n).
3. Пусть $x(k) \leftrightarrow X(n)$ – пара 2N-точечного ДПФ. Образуем новые последовательности

$$\begin{gathered} g(l) = x(2l) \leftrightarrow G(m) \\ h(l) = x(2l+1) \leftrightarrow H(m) \\ 0 \le l \le N-1, 0 \le m \le N-1 \end{gathered}$$

   Выразить $X(n)$ через $G(m)$ и $H(m)$.
4. Пусть имеется две действительные последовательности $a(k)$ и $b(k)$ длиной в N отсчётов ($k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$). Образуем совмещённую последовательность $c(k) = a(k) + jb(k)$. Вычислить все коэффициенты ДПФ $A(n)$ и $B(n)$ последовательностей $a(k)$ и $b(k)$ из результатов преобразования $C(n)$ совмещённой последовательности $c(k)$.
5. (M) Пусть $x(k) \leftrightarrow X(n)$ – пара N-точечного ДПФ. Образуем новую последовательность $y(l)$ длинной LN ($0 \le l \le LN-1$) следующим образом:

$$y(l) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\mathbf{1}(l-kL),$$

где

$$\mathbf{1}(l-kL)=\begin{cases}1, & l=kL\\ 0, & l\neq kL\end{cases}$$

и L – положительное целое число. Последовательность $y(l)$ получается из $x(k)$ изменением ее масштаба по оси времени (между каждой парой отсчетов $x(k)$ вставляется $L-1$ нулей). Выразить NL-точечное ДПФ $Y(m)$ последовательности $y(l)$ через $X(n)$.

6. (M) Показать, что для действительной последовательности $x(k)$ фазовый спектр является нечётной функцией относительно точки $k=\frac{N}{2}$, т.е.

$$\varphi(\frac{N}{2}+l)=-\varphi(\frac{N}{2}-l)$$

7. (M) Вычислить коэффициенты ДПФ $X(n)$ для

$$x(k)=cos(\frac{2\pi}{N}rk), 0\leq k\leq N-1$$

для фиксированного значения r из диапазона $0\leq r\leq N-1$.

8. (M) Пусть $Y(n)$ обозначает MN-точечное ДПФ N-точечной последовательности $x(k)$, дополненной $(M-1)N$ нулями. Показать, что N-точечное ДПФ $X(n)$ может быть получено из $Y(n)$ следующим образом:

$$X(n)=MY(nM), 0\leq n\leq N-1.$$

9. (M) Определить ДПФ N-точечной последовательности (N – четное):

$$x(k)=\begin{cases}1, & k=2m\\ 0, & k=2m+1\end{cases}$$

10. (M) Определить ДПФ N-точечной последовательности (N – четное):

$$x(k)=\begin{cases}1, & 0\leq k\leq \frac{N}{2}-1\\ 0, & \frac{N}{2}\leq k\leq N-1\end{cases}$$

11. (M) Пусть $X(n)$ – четырехточечное ДПФ последовательности

$$x(k) = [1, 3/4, 1/2, 1/4].$$

Изобразить последовательность $y(k)$, ДПФ которой имеет вид

$$Y(n) = exp(-j\frac{2\pi}{4}3n)X(n)$$

12. Действительный сигнал $x(t)$ дискретизуется с частотой $f_d =$ 5 кГц так, что наложение отсутствует. Полученная таким образом последовательность $x(k)$ содержит $N = 512$ отсчетов. По этой последовательности вычисляется 512-точечное ДПФ. Известно, что $X(11) = 2000(1 + j)$.

Что можно сказать о других $X(n)$ и о значениях ДВПФ на соответствующих частотах?

13. Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой 10 кГц дескритизуется в соответствие с теоремой отчетов, в результате получается последовательность $x(k)$. Пусть $X(n)$ – 1000-точечное ДПФ последовательности $x(k)$. Какой непрерывной частоте соответствуют индексы $n = 150$ и $n = 800$ в последовательности $X(n)$?

14. Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой 10 кГц дескритизуется в соответствие с теоремой отчетов, в результате получается последовательность $x(k)$ длинной в $N = 1000$ отсчетов. Пусть $X(n)$ – 1000-точечное ДПФ последовательности $x(k)$. Известны два значения

$$X(900) = 1B, X(420) = 5B.$$

Найти все значения ДВПФ, которые можно определить.

15. Последовательность $x(k) = x(x\Delta t)$ получена в результате дискретизации непрерывного сигнала $x(t)$ с шагом Δt. Пусть верхняя частота спектра непрерывного сигнала 100кГц. Для оценки спекта вычисляется 1024-точечное ДПФ $X(n)$ последовательности $x(k)$. При каком наименьшем шаге Δt расстояние между непрерывными частотами, соответствующими отсчетам ДПФ, не превышает 1 кГц?

16. Последовательность $x(k) = x(x\Delta t)$ получена в результате дискретизации входного сигнала $x(t)$ шагом $\Delta t = 50$ мкс. Пусть $X(n)$ – 8192-точечное ДПФ последовательности $x(k)$. Определить расстояние между непрерывными частотами, соответствующими отсчетам ДПФ.

17. Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой 10 кГц дескритизуется в соответствие с теоремой отчетов с шагом Δt, в результате получается последовательность $x(k)$. Для исследования спектральных свойств сигнала вычисляется N-точечное ДПФ, где $N = 2^{\nu}$, ν – натуральное число. Определить минимальное значение N и допустимые пределы частоты дискретизации

$$f_{dmin} < \frac{1}{\Delta t} < f_{dmax},$$

при которых анализ возможен, а расстояние между отсчетами ДПФ будет меньше 5 Гц (по эквивалентным непрерывным отсчетам).

18. (М) Сигнал $x(t) = cos(\omega_0 t)$ дискретизуется с с шагом Δt. Из полученной последовательности вырезается отрезок $x(k)$ длиной в N отсчетов. Для проведения спектрального анализа вычисляется N-точечное ДПФ. Для фиксированных ω_0, N, n_0 подобрать такое Δt, чтобы $X(n_0) \neq 0, X(N-n_0) \neq 0$, а остальные $X(n)$ равны 0. Единственное ли это значение Δt?

19. (М) Пусть $x(k)$ – периодическая последовательность с периодом N. Тогда $3N$ тоже можно считать ее периодом. Пусть $X(n)$ – коэффициент ДПФ N-периодической последовательности, а $X_3(n)$ – коэффициент $3N$-периодической последовательности. Выразить $X_3(n)$ через $X(n)$. Проверить на последовательности

$$x(k) = [1; 2], N = 2.$$

20. Рассмотрим последовательность $x(k)$ с периодом $N = 10$:

$$x(k) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ 0, & \frac{N}{2} \leq k \leq N - 1 \end{cases}$$

Найти связь между коэффициентами ДПФ и ДВПФ одного периода изобразить по модулю.

21. (M) Рассмотрим последовательность $x(k)$ с периодом $N = 10$:
$$x(k) = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le \frac{N}{2} - 1 \\ 0, & \frac{N}{2} \le k \le N - 1 \end{cases}$$
Найти ДПФ этой последовательности. Изобразить модули и фазы коэффициентов ДПФ.

22. Рассмотрим конечную последовательность из пяти отсчетов прямоугольного импульса $x(k) = [1, 1, 1, 1, 1]$. Найти и изобразить по модулю ДВПФ этой последовательности Для периодического повторения этой последовательности с периодом $N = 5$
$$y(k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(k + rN)$$
найти и изобразить по модулю ДВПФ и ДПФ.

8. Работа в среде GNU Octave или MATLAB

Лабораторную работу можно выполнять как в среде MATLAB, так и в GNU Octave. Далее по тексту GNU Octave и MATLAB можно считать синонимами.

8.1. Рабочая директория

В среде GNU Octave можно использовать не только встроенные команды, но и расширять функционал с помощью дополнительных файлов-скриптов (*.m). Без указания полного пути в среде доступны файлы из так называемой «рабочей директории». Сменить ее можно с помощью команды **cd**, а также используя соответствующие кнопки в панели инструментов.

8.2. Рабочая область

В ходе работы все вычисленные ранее переменные сохраняются в так называемой «рабочей области». Посмотреть содержимое «рабоче области» можно как в отдельно окне, так и с помощью команды **who**. Очистить рабочую область можно командой **clear**.

8.3. Язык сценариев (m-файлы)

8.3.1. Переменные

Имена переменных могут состоять из произвольных букв, цифр и знаков «_». Не рекомендуется использовать в качестве имен переменных имена стандартных функций, а также имена стандартных переменных:

- i или j – мнимая единица
- inf – неопределенность 1/0
- NaN – неопределенность 0/0
- ans – результат последней операции.
- pi – число Пи
- rand – псевдослучайное число из интервала [0;1]
- eps – текущая относительная точность вычислений

8.3.2. Матрицы

Матрицы – основной объект, с которым работает GNU Octave. Вектор – матрица размерности 1xN или Nx1. Скаляр – матрица 1x1. В записи размерности матрицы «MxN» M обозначает число строк, N – число столбцов.

Скаляры создаются с помощью оператора присваивания:

$$scalar = 1.234;$$

Для ввода матриц большей размерности используются символы «[]». Матрицы задаются построчно, элементы одной строки разделяются пробелом, а строки – символом «;». Например, матрицы можно задать так:

```
matrix = [1 2;3 4; 5 6];      % матрица 3x2
vector = [1 2 3];             %вектор — строка
vector1 = [1;2;3];            %вектор – столбец
```

Большие матрицы можно формировать из матриц меньшей размерности. Например, используя матрицу и вектор, заданные выше, команда a = [matrix vector1; 0 1 2] определяет матрицу [1 2 1; 3 4 2; 5 6 3; 0 1 2].

Для обращения к элементам матрицы используются «()». Чтобы получить элемент из строки i и столбца j используется запись A(i,j). Нумерация строк и столбцов начинается с единицы. Можно обращаться не только к отдельным элементам матриц, но также получить целые строки и столбцы. A(:,j) – j-ый вектор-столбец, A(i,:) – i-ая строка.

Для создания вектора-строки из последовательных элементов есть специальный оператор перечисления «:»

$$u = start : step : end;$$

В результате в u будет вектор, состоящий из элементов арифметической прогрессии, первый элемент которой равен start, а шаг – step. Последний элемент вектора будет максимальным членом прогрессии, который не превышает end. Если step = 1, то можно его не указывать: v = 1:5 задает вектор [1 2 3 4 5]

Для матриц доступны следующие полезный функции:

- оператор «'» – транспонирует матрицу
- size(A) – определяет размеры матрицы, возвращает вектор 1x2 вида [M, N], где M – число строк, N – число столбцов.
- length(A) – максимальный из размеров матрицы A. Удобно определять число элементов в векторе.

8.3.3. Арифметические операции

Т.к. все объекты в GNU Octave – это матрицы, то и операции с ними соответствуют операциям с матрицами. Ниже приведен список основных операций:

- = – присваивание;
- + – сложение;
- * – умножение;

- \– деление слева (X = A \B – результат решения уравнения $A \cdot X = B, X = A^{-1} \cdot B$);

- / – деление справа (X = A/B – результат решения уравнения $X \cdot B = A, X = A \cdot B^{-1}$);

- ^– возведение в степень;

- .* – поэлементное умножение;

- .^– поэлементное возведение в степень;

- ./ – поэлементное деление.

Следуют помнить, что операции подчиняются требованиям традиционной матричной алгебры. GNU Octave автоматически проверяет размерность операндов.

8.4. Сценарии

Сценарий записываются в текстовых файлах с расширением «.m». В этом файле перечислена последовательность операций, так, как если бы она же выполнялась посредством ввода отдельных команд в командной строке. Все переменные, объявленные в сценарии, сохраняются в рабочей области и доступны для дальнейшего использования в командной строке или других сценариях. Чтобы вызвать сценарий, нужно набрать имя его файла без расширения в командной строке. Например, запуск сценария my_script.m из рабочей директории осуществляется вводом my_script в окне команд.

8.5. Функции

Чтобы не засорять рабочую область лишними переменными, часть кода сценариев можно оформить в виде функций. Функции также записываются в текстовых файлах с расширением «.m». В отличие от сценариев в файле функции первым должен быть специальный оператор, содержащей описание функции:

$$function[out\_params] = function\_name(in\_params)$$

Это означает, что в файле записана функция с именем function_name, у которой есть входные аргументы in_params, а результат сохраняется в выходных переменных out_params.

Завершается описание функции ключевым словом end.

Название функции должно совпадать с названием файла, в котором она описана.

Входные аргументы передаются в функцию «по значению». Любые изменения этих переменных в теле функции не отразятся на их значениях в рабочей области.

Чтобы вызвать функцию, нужно указать ее имя и список аргументов в круглых скобках:

$$val = function\_name(some\_arg);$$

Если указаны несколько входных/выходных значений:

$$function[out1out2] = function\_name(in1, in2)$$

то функцию можно вызывать так:

$$[a1\ a2] = function\_name(b1, b2);$$

8.6. Некоторые стандартные операции

В стандартной поставке GNU Octave доступны основные математический функции (exp, cos, sin, acos, atan, sqrt, abs, log, log10 и т.п.)

Для округления можно пользоваться функциями round(x) (до ближайшего целого), fix(x) (до целого в сторону нуля), ceil(x)/floor(x) (до ближайшего целого в сторону увеличения/уменьшения).

Для работы с комплексными числами доступны следующие функции:

- arg(x) – аргумент комплексного числа;
- abs(x) – модуль комплексного числа;
- real(x) – действительная часть;
- imag(x) – мнимая часть;
- conj(x) – комплексное сопряжение.

Иногда требуется сформировать вектора или матрицы определенного вида. Для этого есть следующие функции:

- linspace(start, end, N) – формирует вектор-строку из N элементов равномерно расположенных между start и end.
- linspace(start, end, N) – формирует вектор-строку из N элементов равномерно логарифмически между start и end.
- zeros(N, M) – создает нулевую матрицу размером NxM. Вектор-строку из M нулей можно получить с помощью команды zeros(1, M).
- ones(N, M) – создает матрицу размером NxM, все элементы которой равны единице. Вектор-строку из M единиц можно получить с помощью команды ones(1, M).
- rand(N,M) – создает матрицу размером NxM, все элементы которой – случайные числа, равномерно распределенные на интервале (0.0, 1.0).

8.7. Рисование графиков

Команда **figure** создает новое окно для рисования графиков. Все команды рисования влияют на последнее созданное окно.

Непрерывные графики выводятся с помощью команды **plot(x,y)**. Аргументами могут быть:

- вектора одинаковой размерности, x – значения по оси абсцисс, y – значения по оси ординат;
- матрицы одинаковой размерности: для каждого столбца из x выбирается соответствующий столбец из y и строится график, как в случае выше;
- x - вектор, а y – матрица (или наоборот), такие, что длина вектора совпадает с одной из размерностей матрицы: для каждого столбца (строки) матрицы строится отдельный график, где в качестве значений для второй оси используются элементы вектора

Также можно задать несколько пар аргументов (x,y), чтобы построить несколько графиков на одном рисунке (**plot(x1,y1, x2,y2)**)

Если нужно нарисовать график отдельных отсчетов, то следует использовать команду **stem**. Ее аргументы аналогичны команде **plot**.

Повторные вызовы команд **plot** или **stem** заменяют график в последнем окне, созданном командой **figure**. Для того, чтобы отобразить в одном окне несколько отдельных графиков, существует команда **subplot(i,j, p)**. Эта команда делит окно вывода графиков на сетку из i строк и j столбцов. Параметр p выбирает область окна, в которой следующая команда **plot** или **stem** будет осуществлять рисование графика. Области нумеруются слева направо сверху вниз (для вывода четырех графиков (i,j – p): 1,1 – 1, 1,2 – 2, 2,1 – 3, 2,2 – 4).

Литература

1. *Романюк Ю.А.* Свойства и преобразования дискретных сигналов // Основы цифровой обработки сигналов: учебное пособие. –М.: МФТИ, 2007. Ч. 1.

2. *Романюк Ю.А.* Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе учебное пособие. –М.: МФТИ, 2007.